Скалярное произведение векторов. Проекция вектора на ось и на плоскость.

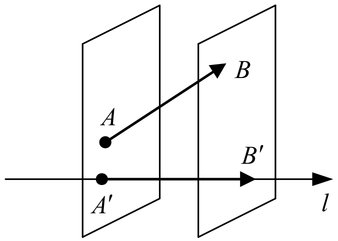


Рис. 4.15.

Проекцией точки A на ось l называется точка пересечения этой оси с плоскостью, проходящей через точку A, перпендикулярно оси l.

Геометрической проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется вектор $\overline{A'B'}$, где A' и B' проекции точек A и B на эту ось. Если $\overline{m}^0$ орт направления оси l, вектор $\overline{A'B'} = m\overline{m}^0$. Число m называется *алгебраической проекцией* вектора на ось l и обозначают $\text{пр}_l \overline{AB}$ или $\text{пр}_{\overline{m}^0} \overline{AB}$. Очевидно,

$$\text{пр}_{\overline{m}^0} \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos\omega,$$

где ω - угол между вектором $\overline{AB}$ и положительным направлением оси l.

Имеют место следующие свойства:

а) $\text{пр}_l\left(\lambda\overline{a}\right) = \lambda \text{пр}_l \overline{a}$;

б) $\text{пр}_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = \text{пр}_l\overline{a} + \text{пр}_l\overline{b}$.

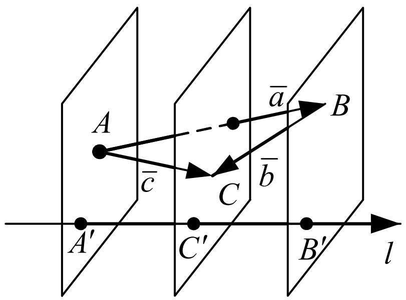


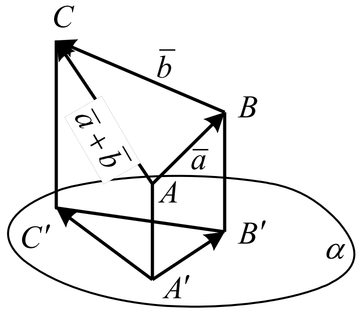
Рис. 4.16.

Рассматривая отдельно $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$ легко установить свойство а). Второе свойство очевидно.

Проекцией точки A на плоскость α называется точка пересечения этой плоскости и перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость (на рисунке точка A').

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на плоскость α называется вектор $\overline{A'B'}$, где A' и B' проекции точек A и B на эту плоскость и обозначают её $\overline{\text{пр}_\alpha \overline{AB}}$.

Свойства проекции вектора на плоскость:



а) $\overline{\text{пр}_\alpha\left(\lambda\overline{a}\right)} = \lambda\overline{\text{пр}_\alpha \overline{a}}$ (постоянный множитель можно выносить за знак проекции);

б) $\overline{\text{пр}_\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)} = \overline{\text{пр}_\alpha \overline{a}} + \overline{\text{пр}_\alpha \overline{b}}$.

Свойства проекции вектора на плоскость:

а) $\overline{\text{пр}_\alpha\left(\lambda\overline{a}\right)} = \lambda\overline{\text{пр}_\alpha \overline{a}}$ (постоянный

Рис.4.17.

множитель можно выносить за знак проекции);

б) $\overline{\text{пр}_\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)} = \overline{\text{пр}_\alpha \overline{a}} + \overline{\text{пр}_\alpha \overline{b}}$ (свойство усматривается из рис.4.17).

Скалярное произведение векторов и его свойства.

Скалярным произведением двух векторов и называется число, равное произведению их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается $\overline{a}\cdot\overline{b}$. Если φ угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то по определению

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi.$$

Так как $\left|\overline{b}\right|\cos\varphi = \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$, то формула (999) может быть записана в виде $\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$. Справедлива и формула $\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{b}\right|\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$.Итак,

$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi = \left|\overline{a}\right|\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \left|\overline{b}\right|\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$.

Скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного из этих векторов и проекции другого на направление первого.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $\overline{b}\cdot\overline{a} = \overline{a}\cdot\overline{b}$ (*переместительный закон*). Это свойство непосредственно следует из определения скалярного произведения.

2. $\left(\lambda\overline{a}\right)\cdot\overline{b} = \overline{a}\cdot\left(\lambda\overline{b}\right) = \lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$ (*сочетательный закон*). Действительно,

$\left(\lambda\overline{a}\right)\cdot\overline{b} = \left|\overline{b}\right|\text{пр}_{\overline{b}}\left(\lambda\overline{a}\right) = \left|\overline{b}\right|\lambda\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \lambda\left(\left|\overline{b}\right|\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}\right) = \lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$.

3. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$ (*распределительный закон.*)

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\left|\overline{c}\right|\text{пр}_{\overline{c}}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\left|\overline{c}\right|\left(\text{пр}_{\overline{c}}\overline{a}+\text{пр}_{\overline{c}}\overline{b}\right)=$$

$$=\left|\overline{c}\right|\text{пр}_{\overline{c}}\overline{a}+\left|\overline{c}\right|\text{пр}_{\overline{c}}\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$$

4. $\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$.

Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны.

Необходимость. Пусть $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, тогда $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi=0$, откуда либо один из векторов нулевой, либо $\cos\varphi=0$. Если один из векторов нулевой, то ему можно приписать любое направление, и векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны. Если же $\cos\varphi=0$, то угол φ прямой и векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны. Доказано, что из $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ следует $\overline{a}\perp\overline{b}$.

Достаточность. Пусть $\overline{a}\perp\overline{b}$, тогда $\cos\varphi=0$, а, следовательно, $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$. Доказано, что из $\overline{a}\perp\overline{b}$ следует $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

5. $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=\left|\overline{a}\right|^2$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату длины этого вектора.

Действительно, $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{a}\right|\cos 0=\left|\overline{a}\right|^2$.

. Скалярное произведение в координатной форме.

Пусть $\overline{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ и $\overline{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$.

Так как $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ взаимно перпендикулярные орты, то $\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{i}\cdot\overline{k}=\overline{j}\cdot\overline{k}=0$, $\overline{i}^2=\overline{j}^2=\overline{k}^2=1$ и, учитывая свойства скалярного произведения, имеем

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left(a_1\overline{i}+a_2\overline{j}+a_3\overline{k}\right)\cdot\left(b_1\overline{i}+b_2\overline{j}+b_3\overline{k}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 .$$

Скалярное произведение в координатной форме равно сумме произведений одноименных координат т.е. $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

. Применение скалярного произведения.

Скалярное произведение векторов применяется для нахождения длины вектора, косинуса угла между векторами, проекции одного вектора на направление другого и установления перпендикулярности векторов.

1) $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}^2}$ или $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}$.

2) $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\overline{a}^0\cdot\overline{b}^0$.

3) $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}=\overline{a}\cdot\overline{b}^0$.

4) $\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

Пример 1. Дано: $\left|\overline{a}\right|=4$, $\left|\overline{b}\right|=3$, $\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$, $\overline{m}=\overline{a}-2\overline{b}$, $\overline{n}=\beta\overline{a}+2\overline{b}$.

Найти: а) длину вектора $\overline{m}$;

б) значение параметра β, при котором векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ перпендикулярны.

Решение. а) $\left|\overline{m}\right|=\sqrt{\overline{m}^2}=\sqrt{\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)^2}=$

$$=\sqrt{\overline{a}^2-4\overline{a}\overline{b}+4\overline{b}^2}=\sqrt{\left|\overline{a}\right|^2-4\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)+4\left|\overline{b}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{4^2-4\cdot4\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot3^2}=\sqrt{76};$$

б) $\overline{m}\perp\overline{n}\Leftrightarrow\overline{m}\cdot\overline{n}=0$.

$$\overline{m}\cdot\overline{n}=\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)\cdot\left(\beta\overline{a}+2\overline{b}\right)=\beta\overline{a}^2+2\overline{a}\cdot\overline{b}-2\beta\overline{a}\cdot\overline{b}-4\overline{b}^2=$$

$$16\beta+\left(2-2\beta\right)\cdot4\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-4\cdot9=0\Rightarrow22\beta-42=0\Rightarrow\Rightarrow\beta=1.5,$$

т.е. при $\beta=1.5$ векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ перпендикулярны.

Пример 2. Даны два вектора $\overline{a}=\left(8,4,1\right)$, $\overline{b}=\left(2,-2,1\right)$, приложенные к одной точке. Найти вектор $\overline{c}$, исходящий из этой же точки, перпендикулярный вектору $\overline{a}$, равный ему по длине, компланарный с векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, образующий с вектором $\overline{b}$ острый угол.

Решение. Так как вектор $\overline{c}$ компланарный с векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то его можно разложить по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. найдутся такие числа α и β, что $\overline{c}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}$, поэтому $\overline{c}=\left(8\alpha+2\beta,4\alpha-2\beta,\alpha+\beta\right)$.

Вектор $\bar{c} \perp \bar{a}$, поэтому скалярное произведение $\bar{c} \cdot \bar{a} = 0$.
$\bar{c} \cdot \bar{a} = 8(8\alpha + 2\beta) + 4(4\alpha - 2\beta) + \alpha + \beta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 81\alpha + 9\beta = 0 \Rightarrow \beta = -9\alpha$ и $\bar{c} = (-10\alpha, 22\alpha, -8\alpha)$.

Вектор $\bar{c}$ образует с вектором $\bar{b}$ острый угол, поэтому косинус угла между ними положителен и $\bar{b} \cdot \bar{c} > 0$.
$\bar{b} \cdot \bar{c} = -20\alpha - 44\alpha - 8\alpha = -72\alpha > 0$, откуда $\alpha < 0$.

$|\bar{c}| = |\bar{a}| \Rightarrow \sqrt{100\alpha^2 + 484\alpha^2 + 64\alpha^2} = \sqrt{64 + 16 + 1} = 9$ и

$18\sqrt{2}|\alpha| = 9 \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Учитывая, что $\alpha < 0$, имеем $\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ и

$\bar{c} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{11\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right)$.

Экспресс-самопроверка.

1. Коллинеарны ли векторы $\bar{a} = (2,1,-4)$, $\bar{b} = (-4,-2,8)$?

2. Даны точки $A(1,3,4)$ и $B(3,1,5)$.

Найти:

а) координаты вектора $\overline{AB}$;

б) длину вектора $\overline{AB}$;

в) орт вектора $\overline{AB}$;

г) $\cos\beta$.

3. Даны точки $A(1,3,4)$ и $B(3,1,8)$. Найти координаты точки, которая делит отрезок AB пополам.

4. Вектор $\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{a} = (3,4)$ и имеет одинаковую с ним длину. Найти координаты вектора $\bar{b}$.

5. Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

6. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = (2,1,-4)$ и $\bar{b} = (1,3,0)$.

7. Проверить, перпендикулярны ли векторы $\bar{c}_1 = (2,1,-4)$ и $\bar{c}_2 = (2,4,2)$.