ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{R}^3$

4.1. Геометрические векторы.

4.1.1.Основные понятия.

Геометрическим вектором или просто *вектором* называется направленный отрезок.

Вектор как правило обозначают $\overline{AB}$, при этом точки A и B обозначают соответственно начало и конец направленного отрезка. Начало вектора назывют *точкой приложения вектора*.

Длину вектора $\overline{a}$ называют *модулем* вектора $\overline{a}$ и обозначают $|\overline{a}|$.

Очевидно, $|\overline{a}| \geq 0$.

Вектор, модуль которого равен единице, называют *единичным вектором*.

Векторы $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *называют коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых. В этом случае пишут $\overline{a} \parallel \overline{b}$. Если векторы $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ одинаково направлены, то пишут $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, а если векторы имеют противоположное направление, то $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Единичный вектор одинаково направленный с вектором $\overline{a}$, называют *ортом вектора* $\overline{a}$ и обозначают его $\overline{a}^0$. Орт вектора $\overline{a}^0$ несет информацию о направлении вектора $\overline{a}$, а модуль $|\overline{a}|$ - о длине этого вектора. В дальнейшем будет показано, что $\overline{a} = |\overline{a}|\overline{a}^0$.

Вектор называется *нулевым*, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ называются *равными*, тогда и только тогда когда они имеют равные модули и одинаковые направления,

т.е. $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\overline{a}| = |\overline{b}|, \\ \overline{a}^0 \uparrow\uparrow \overline{b}^0. \end{cases}$

В математике, как правило, изучают *свободные* векторы. Эти векторы определены с точностью до точки приложения.

4.1.2. Линейные операции над векторами.

Линейными операциями над векторами принято называть операцию сложения векторов и операцию умножения вектора на вещественное число.

Суммой $\overline{a} + \overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$.

Правило сложения двух векторов, основанное на этом определении, обычно называют «правило треугольника».

Правило сложения векторов обладает теми же самыми свойствами, что и правило сложения для рис. 4.1 вещественных чисел:

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (коммутативность);

2) $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right)$ (ассоциативность);

3) существует нулевой вектор $\overline{0}$ такой, что $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$ для любого вектора $\overline{a}$ (особая роль нулевого вектора);

4) для каждого вектора $\overline{a}$ существует противополжный ему вектор $-\overline{a}$ такой, что $\overline{a} + \left(-\overline{a}\right) = \overline{0}$.

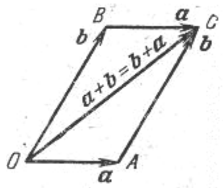


Рис. 4.1

Для доказательства свойства 1 приложим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ к общему началу O рассмотрим параллелограмм $OBCA$. $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$.

$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = \overline{b} + \overline{a}$

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$, откуда $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

Для доказательства свойства 2 рассмотрим рис.4.2. С одной стороны

$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = \left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c}$,

с другой - $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right)$,

откуда $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right)$.

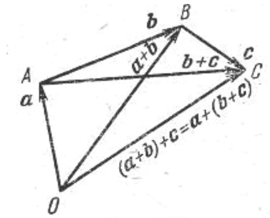


Рис. 4.2.

Из свойства 2 следует правило построения вектора суммы любого числа слагаемых.

Если приложить начало каждого последующего вектора $\overline{a}_{i+1}$ в конец предыдущего вектора $\overline{a}_i$, то вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}_1$ в конец вектора $\overline{a}_n$ является *вектором суммы* $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n$.

Разностью $\overline{a}-\overline{b}$ вектора $\overline{a}$ и вектора $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ даёт вектор $\overline{a}$.

Произведением $\lambda\overline{a}$ *вектора* $\overline{a}$ *на вещественное число* λ называется вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$, имеющий длину $|\lambda||\overline{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\overline{a}$ в случае $\lambda>0$, и противоположное вектору $\overline{a}$ в случае $\lambda<0$.

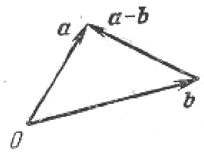


Рис. 4.3.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

5) $\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$ (дистрибутивность);

6) $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$;

7) $\alpha\left(\beta\overline{a}\right)=(\alpha\beta)\overline{a}$

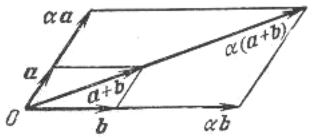


Рис.4.4.

Для доказательства свойства 5 приложим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ к общему началу O и построим параллелограммы, диагональ одного из них равна $\overline{a}+\overline{b}$, а диагональ другого равна $\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$. Из подобия треугольников следует $\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$.

Другие свойства очевидны.

4.1..3. Линейная зависимость векторов. Критерии коллинеарности и компланарности. Ранг и базис системы векторов.

Для *геометрических векторов* вводится понятие линейной комбинации векторов, понятие линейно зависимых и линейно независимых систем векторов, базис и ранг также как и для трёмерных векторов.

Выражение вида $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots+\lambda_m\overline{a}_m$, где $\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \ldots,\quad \lambda_m$ числа, называется *линейной комбинацией* геометрических векторов $\overline{a}_1,\quad \overline{a}_2,\quad \ldots\quad \overline{a}_m$.

Система геометрических векторов $\overline{a}_1,\quad \overline{a}_2,\quad \ldots\quad \overline{a}_m$ называется *линейно зависимой*, если хотя бы один вектор этой системы может быть представлен в виде линейной комбинации других векторов этой системы. В противном случае система называется *линейно независимой.*

Теорема 1. *Два коллинеарных вектора* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ $\left(\overline{b}\neq\overline{0}\right)$ *линейно зависимы.*

Действительно, если $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, то $\overline{a}^0=\overline{b}^0$ и

$$\overline{a}=|\overline{a}|\overline{a}^0=|\overline{a}|\overline{b}^0=\frac{|\overline{a}||\overline{b}|}{|\overline{b}|}\overline{b}^0=\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\overline{b}$$

, откуда следует что векторы $\overline{a}$ линейно выражается через вектор $\overline{b}$, поэтому они линейно зависимы. Если $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$, то $\overline{a}^0=-\overline{b}^0$ и

$$\overline{a}=|\overline{a}|\overline{a}^0=-|\overline{a}|\overline{b}^0=-\frac{|\overline{a}||\overline{b}|}{|\overline{b}|}\overline{b}^0=-\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\overline{b}.$$

Теорема 2. *Два неколлинеарных вектора* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ *линейно независимы.*

Предположим, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы. Тогда хотя бы один из этих векторов представим в виде линейной комбинации другого, например, $\overline{a}=\beta\overline{b}$, но последнее означает, что векторы коллинеарны. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теорем 1 и 2 следует *критерий коллинеарности двух векторов.*

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда хотя бы один из них может быть представлен в виде линейной комбинации другого.

Теорема 3. *Любой вектор плоскости можно разложить по двум неколлинеарным векторам, причем, единственным образом.*

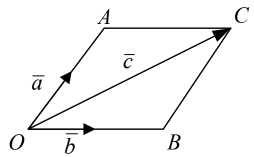


Рис. 4.5

Доказательство. Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны. Приложим их к общему началу O. Произвольный вектор $\overline{c}$ плоскости приложим к этому же началу. Из конца вектора $\overline{c}$ проведем прямые, параллельные векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и построим параллелограмм $OACB$. Вектор $\overline{OA}\parallel\overline{a}$, поэтому вектор $\overline{OA}$ можно представить в виде линейной комбинации вектора $\overline{a}$, т.е. $\overline{OA}=\alpha\overline{a}$. Так как вектор

$\overline{OB} \parallel \overline{b}$, то его можно представить в виде $\overline{OB} = \beta\overline{b}$. Тогда $\overline{c} = \overline{OA} + \overline{OB} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

Покажем единственность разложения $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$. Пусть наряду с этим разложением существует и другое разложение $\overline{c} = \alpha_1\overline{a} + \beta_1\overline{b}$. Не нарушая общности можно считать, что $\alpha \neq \alpha_1$. Вычитая последнее выражение из первого, имеем $(\alpha - \alpha_1)\overline{a} + (\beta - \beta_1)\overline{b} = 0$, откуда следует, что $\overline{a} = -\dfrac{\beta - \beta_1}{\alpha - \alpha_1}\overline{b}$ и векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. Полученное противоречие доказывает единственность разложения.

Теорема 4. *Три компланарных вектора* $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ *линейно зависимы.*

Доказательство.

1) Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации другого. Не нарушая общности можно считать, что $\overline{a} = \beta\overline{b}$. Тогда $\overline{a} = \beta\overline{b} + 0 \cdot \overline{c}$, откуда следует, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ линейно зависимы.

2) Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, то вектор $\overline{c}$ можно в силу предыдущей теоремы разложить по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. представить в виде $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$, а это означает, что данные векторы линейно зависимы.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Три некомпланарных вектора* $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ *линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что эти векторы линейно зависимы. Тогда какой-либо вектор этой системы можно представить в виде линейной комбинации других. Не нарушая общности можно считать, что $\overline{a} = \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, а это означает, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ принадлежат одной плоскости, т.е. компланарны.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теорем 4 и 5 следует *критерий компланарности трёх векторов*.

Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда хотя бы один из них может быть представлен в виде линейной комбинации других.

Теорема 6. *Любой вектор* $\overline{d}$ *может быть разложен по трём некомпланарным векторам* $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$*, причем, единственным образом.*

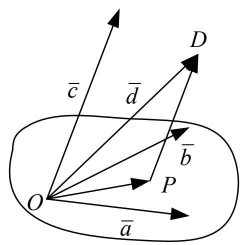


Рис. 4.6.

Доказательство. Приложим начала всех векторов в точку O. Из конца вектора $\overline{d}$ проведем прямую, параллельную вектору $\overline{c}$, до пересечения её с плоскостью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Пусть P - точка пересечения этой прямой и плоскости. Очевидно, $\overline{d} = \overline{OP} + \overline{PD}$, $\overline{OP} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$, $\overline{PD} = \gamma\overline{c}$ и $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$.

Покажем, что разложение $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$ единственное. Предположим противное, а именно, что существует ещё одно разложение $\overline{d} = \alpha_1\overline{a} + \beta_1\overline{b} + \gamma_1\overline{c}$, отличное от предыдущего. Пусть $\alpha \neq \alpha_1$. Вычитая первое разложение из второго, имеем $(\alpha_1 - \alpha)\overline{a} + (\beta_1 - \beta)\overline{b} + (\gamma_1 - \gamma)\overline{c} = 0$. Так как $\alpha \neq \alpha_1$, то вектор $\overline{a}$ может быть представлен в виде линейной векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$, откуда следует, что эти векторы компланарны. Полученное противоречие доказывает теорему и, следовательно, разложение $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$ единственно.

Теорема доказана.

Линейно независимыми являются:

1) один ненулевой вектор;

2) два неколлинеарных вектора;

3) три некомпланарных вектора.

В пространстве геометрических векторов все остальные системы векторов являются линейно зависимыми.

Определение 1.*Максимальная, упорядоченная, линейно независимая подсистема* данной системы геометрических векторов называется *базисом* данной системы.

Определение 2.Число векторов, входящих в базис данной системы векторов, называется *рангом* этой системы.

В пространстве геометрических векторов все системы, содежащие более трёх векторов, линейно зависимы, поэтому базис в этом пространстве содержит не более трёх векторов и ранг такой системы не более трёх.

4.2. Системы координат.

Пусть векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют базис. Тогда эти векторы векторы линейно независимы и некомпланарны. Из теоремы 6 следует, что любой вектор $\overline{d}$ можно разложить по этому базису, причём, единственным способом.

Если вектор $\overline{d}$ в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ имеет разложение $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, то тройка чисел (α, β, γ) называется *координатами вектора* $\overline{d}$ в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Пишут $\overline{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.

Замечание. В базисе $\overline{c}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$ вектор $\overline{d} = (\gamma, \alpha, \beta)$ в базисе $\{\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}\}$.

Вектор $\overline{a} = 1 \cdot \overline{a} + 0 \cdot \overline{b} + 0 \cdot \overline{c}$, поэтому $\overline{a} = (1,0,0)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$. Аналогично доказывается, что $\overline{b} = (0,1,0)$, $\overline{c} = (0,0,1)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.

4.2.1. Аффинная система координат.

Базис $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и точка O, называемая началом координат, определяют *аффинную систему* координат.

Коэффициенты разложения вектора $\overline{OM}$ по базису $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называются *аффинными координатами* точки M в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.

Пусть $\overline{OM} = m_1\overline{a} + m_2\overline{b} + m_3\overline{c}$, тогда (m_1, m_2, m_3)- координаты точки M в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ и пишут $M(m_1, m_2, m_3)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.

В силу единственности разложения вектора по базису каждой точке M соответствует единственная тройка чисел (m_1, m_2, m_3) в данном базисе.

Справедливо и обратное. Каждой тройке чисел (m_1, m_2, m_3) в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ соответствует единственная точка.

Вектор $\overline{OM}$ называют *радиус-вектором* точки M и обозначают его $\overline{r}_M$.

Если векторы (не все коллинеарные) принадлежат плоскости, то базис этой системы состоит из двух неколлинеарных векторов.

Линейные операции над векторами в координатной форме.

Пусть $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ базис, $\overline{m} = m_1\overline{a} + m_2\overline{b} + m_3\overline{c}$ и $\overline{n} = n_1\overline{a} + n_2\overline{b} + n_3\overline{c}$. Тогда $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ и $\overline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$. *Обратите внимание*! Координаты вектора не зависят от начала координат.

1) *Равенство векторов в координатной форме*. Если $\overline{m} = \overline{n}$, то $m_1\overline{a} + m_2\overline{b} + m_3\overline{c} = n_1\overline{a} + n_2\overline{b} + n_3\overline{c}$ или $(m_1 - n_1)\overline{a} + (m_2 - n_2)\overline{b} + (m_3 - n_3)\overline{c} = \overline{0}$, а в силу единственности разложения нулевого вектора, имеем $m_1 - n_1 = 0, m_2 - n_2 = 0$ и $m_3 - n_3 = 0$. Следовательно, $\overline{m} = \overline{n} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = n_1, \\ m_2 = n_2, \\ m_3 = n_3. \end{cases}$

Два вектора в координатной форме равны между собой тогда и только тогда когда равны их соответствующие координаты.

2) Умножение вектора на число.

$\overline{n} = \lambda\overline{m} = \lambda(m_1\overline{a} + m_2\overline{b} + m_3\overline{c}) = \lambda m_1\overline{a} + \lambda m_2\overline{b} + \lambda m_3\overline{c}$.Из равенства двух векторов $\overline{n}$ и $\lambda\overline{m}$ имеем $\overline{n} = \lambda\overline{m} = (\lambda_1 m_1, \lambda m_2, \lambda m_3)$.

Чтобы умножить вектор в координатной форме на число, необходимо умножить на это число каждую координату данного вектора.

3) Коллинеарность двух векторов.

Если $\overline{m} \parallel \overline{n}$ и $\overline{m} \neq \overline{0}$, тогда найдется такое число λ, что $\overline{n} = \lambda\overline{m}$ и $(n_1, n_2, n_3) = (\lambda m_1, \lambda m_2, \lambda m_3)$, откуда $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_3}{m_3} = \lambda$. Имеет место и обратное утверждение, а именно, если соответствующие координаты векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

$$\overline{m} \parallel \overline{n} \Leftrightarrow \frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_3}{m_3} = \lambda.$$

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда соответствующие координаты этих векторов пропорциональны.

Замечание. Если $(m_i = 0) \Rightarrow (n_i = 0)$.

4) Сумма двух векторов в координатной форме.

$\overline{p} = \overline{m} + \overline{n} = (m_1\overline{a} + m_2\overline{b} + m_3\overline{c}) + (n_1\overline{a} + n_2\overline{b} + n_3\overline{c}) =$
$(m_1 + n_1)\overline{a} + (m_2 + n_2)\overline{b} + (m_3 + n_3)\overline{c}$ и $\overline{p} = (m + n_1, m_2 + n_2, m_3 + n_3)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.

Чтобы сложить два вектора в координатной форме необходимо сложить их соответствующие координаты.

В аффинной системе координат рассмотрим несколько простейших задач.

Задача 4.1. В аффинной системе координат даны координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$.

Решение. $\overline{M_1M_2} = \overline{r}_{M_2} - \overline{r}_{M_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. (Для того, чтобы найти координаты вектора по известным координатам начала и конца этого вектора, необходимо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала.)

Задача 4.2. В аффинных координатах даны координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и вектора $\overline{M_1M_2} = (a, b, c)$. Найти координаты точки M_2.

Решение. $\overline{r}_{M_2} = \overline{r}_{M_1} + \overline{M_1M_2} = (x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$. (Для того, чтобы найти координаты конца вектора по известным координатам его начала и координатам самого вектора, необходимо к координатам начала вектора прибавить соответствующие координаты вектора.)

Задача 4.3. В аффинных координатах даны координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

1) Найти координаты точки C, для которой выполняется соотношение $\overline{M_1C} = \lambda\overline{CM_2}$. (Говорят, что точка C делит отрезок M_1M_2 в отношении λ.).

2) Найти координаты точки, которая делит отрезок M_1M_2 пополам. (Очевидно, в этом случае $\lambda = 1$.)

Решение. Пусть (x_C, y_C, z_C)- координаты точки C. Из $\overline{M_1C} = \lambda\overline{CM_2}$ следует $\overline{r}_C - \overline{r}_{M_1} = \lambda(\overline{r}_{M_2} - \overline{r}_C)$, откуда $(1+\lambda)\overline{r}_C = \overline{r}_{M_1} + \lambda\overline{r}_{M_2}$, откуда $\overline{r}_C = (\overline{r}_{M_1} + \lambda\overline{r}_{M_2})/(1+\lambda)$ или

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y_C = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \\ z_C = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \end{cases} \quad \text{При } \lambda = 1 \text{ имеем } \begin{cases} x_C = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y_C = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \\ z_C = \dfrac{z_1 + z_2}{2}. \end{cases}$$

Пример 1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$.Найти координаты его вершин, принимая за начало координат точку A, за положительное направление оси абсцисс- направление стороны AB, за положительное направление оси ординат- направление диагонали AD, а за единицу масштаба по обеим осям – длину стороны шестиугольника.

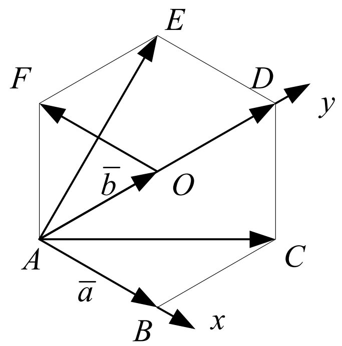


Рис. 4.7.

Решение. Первый *способ*. Обозначим $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AO} = \overline{b}$ (точка O - точка пересечения диагоналей шестиугольника). Координаты вершин шестиугольника совпадают с координатами радиус-векторов этих вершин. $A(0,0)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

$\overline{AB} = \overline{a}$ =(1,0) в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ и точка $B(1,0)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AO} =$
$= \overline{a} + \overline{b}$, откуда $C(1,1)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

$\overline{AD} = 2\overline{AO} = 2\overline{b}$ и $D(0,2)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = \overline{AD} - \overline{AB} = 2\overline{b} - \overline{a}$ и $E(-1,2)$в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

$\overline{AF} = \overline{AO} + \overline{OF} = \overline{AO} - \overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$ и $F(-1,1)$в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

Второй способ.

$\overline{AB} = \overline{FO} = \overline{ED} = (1,0)$, $\overline{AO} = \overline{BC} = \overline{FE} = (0,1)$.

$\overline{r}_A = (0,0)$, $\overline{r}_B = (1,0)$, $\overline{r}_D = \overline{AD} = (0,2)$,

$\overline{r}_E = \overline{r}_D + \overline{DE} = (0,2) - (1,0) = (-1,2)$,

$\overline{r}_F = \overline{r}_O + \overline{OF} = (0,1) + (-1,0) = (-1,1)$,

$\overline{r}_C = \overline{r}_B + \overline{BC} = (1,0) + (0,1) = (1,1)$ в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}\}$

4.2.2. Декартова система координат.

Декартова прямоугольная система координат является частным случаем аффинной системы.

Тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется *правой*, если кратчайший поворот от первого вектора $\overline{a}$ ко второму $\overline{b}$ кажется происходящим против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\overline{c}$ и все векторы тройки приложены в одной точке.

Систему координат, построенную на трёх взаимно ортогональных ортах $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, образующих правую тройку, называют *декартовой системой координат*.

Векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ указывают направление осей Ox, Oy и Oz соответственно (начало координат в точке O).

Такую систему координат принято обозначать $Oxyz$. В декартовой системе координат не указывается базис, по умолчанию это $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

Любой вектор $\overline{OM}$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Пусть $\overline{a} = \overline{OM} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$.

Числа a_x, a_y, a_z называются *декартовыми координатами* точки M в системе $Oxyz$. Координаты вектора $\overline{OM}$ совпадают с координатами точки M.

Расстояние точки M от начала координат O равно длине вектора $\overline{OM}$ и называется *длиной* или *модулем* вектора $\overline{a}$.

Длина вектора $\overline{OM}$ равна длине диагонали OM прямоугольного параллелепипеда, т.е.

$$|\overline{a}| = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2} = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}.$$

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ может быть найдено как длина вектора $\overline{M_1M_2}$.

$$\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

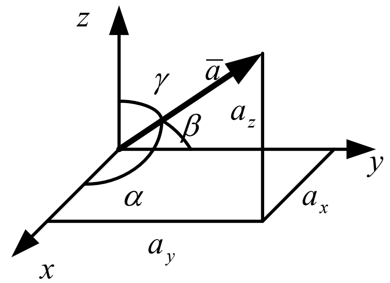


Рис. 4.8.

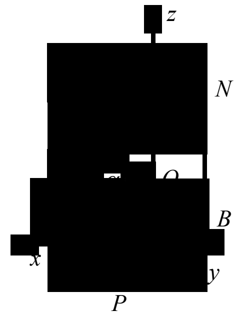


Рис. 4.9.

Через α, β и γ обозначают углы наклона вектора $\overline{a}$ к осям Ox, Oy и Oz соответственно, т.е. $\alpha = \angle(\overline{i}, \overline{a})$, $\beta = \angle(\overline{j}, \overline{a})$ $\gamma = \angle(\overline{k}, \overline{a})$.

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называют *направляющими косинусами.*

Треугольник OMA (рис.4.) прямоугольный $(\angle MAO = 90^0)$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{|\overline{AO}|}{|\overline{MO}|} = \dfrac{a_x}{|\overline{a}|}$. Аналогично из прямоугольных треугольников OMB и OMC имеем $\cos\beta = \dfrac{|\overline{BO}|}{|\overline{MO}|} = \dfrac{a_y}{|\overline{a}|}$ и $\cos\gamma = \dfrac{|\overline{CO}|}{|\overline{MO}|} = \dfrac{a_z}{|\overline{a}|}$.

Из предыдущих формул следует, что

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k} = (a_x, a_y, a_z) = |\overline{a}|\overline{a}^0 = |\overline{a}|\left(\frac{a_x}{|\overline{a}|}, \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \frac{a_z}{|\overline{a}|}\right) =$$

$$= |\overline{a}|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \text{ и } \overline{a}^{\,0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Координатами орта вектора являются его направляющие косинусы.

Направляющие косинусы связаны соотношением
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Последнее соотношение показывает, что произвольно можно выбрать только два угла. Третий угол определяется из следующей формулы $\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$.

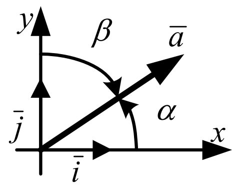


Рис.4.10.

Частный случай. Декартовая система на плоскости построена на двух перпендикулярных ортах $\bar{i}$ и $\bar{j}$. Через α и β обозначают углы наклона вектора $\bar{a}$ к осям Ox и Oy соответственно, т.е.
$\alpha=\angle(\bar{i},\bar{a}),\ \beta=\angle(\bar{j},\bar{a})$.

$\cos\beta=\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha$.

$\bar{a}=|\bar{a}|\bar{a}^0=|\bar{a}|(\cos\alpha,\sin\alpha)$ и $\bar{a}^0=(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

Через $\bar{a}_\theta$ обозначим вектор, длина которого совпадает с длиной вектора $\bar{a}$ $\left(|\bar{a}|=|\bar{a}_\theta|\right)$ и составляет с вектором $\bar{a}$ угол θ. Вектор $\bar{a}_\theta$ составляет с положительным направлением оси Ox угол $\alpha+\theta$, поэтому орт вектора $\bar{a}_\theta{}^0=(\cos(\alpha+\theta),\sin(\alpha+\theta))$ и
$\bar{a}_\theta=|\bar{a}|(\cos(\alpha+\theta),\sin(\alpha+\theta))$.

$\bar{a}_\theta=|\bar{a}|(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta,\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)=$
$=(a_1\cos\theta-a_2\sin\theta,a_2\cos\theta+a_1\sin\theta)$.

При $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ имеем $\bar{a}_{+\frac{\pi}{2}}=(-a_2,a_1)$.

Чтобы повернуть вектор $\bar{a}=(a_1,a_2)$ в пространстве R^2 на $+\dfrac{\pi}{2}$, необходимо координаты вектора $\bar{a}$ поменять местами и у вновь полученной первой координаты поменять знак на противоположный ($\bar{a}_{+\frac{\pi}{2}}=(-a_2,a_1)$).

Очевидно, вектор $\bar{a}_{-\frac{\pi}{2}}=-\bar{a}_{+\frac{\pi}{2}}=|\bar{a}|(\sin\alpha,-\cos\alpha)=(a_2,-a_1)$.

Пример 2. Найти направляющие углы вектора $\bar{a}=(1,-1,-\sqrt{2})$.

Решение. Найдем орт этого вектора. Его координаты являются косинусами направляющих векторов. $|\bar{a}|=\sqrt{1+1+2}=2$, тогда

$$\bar{a}^0=\frac{1}{2}(1,-1,-\sqrt{2})=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^0,\ \cos\beta=-\frac{1}{2}\Rightarrow\beta=120^0,$$

$$\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\gamma=135^0.$$

Пример 3. Даны векторы $\bar{a}=(2,3,1)$, $\bar{b}=(4,2,1)$, $\bar{c}=(6,5,3)$.

а) Показать, что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют базис.

б) Найти координаты вектора $\bar{m}=(6,9.4)$ в базисе $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$.

в) Найти координаты вектора $\bar{m}$ в базисе $\{\bar{c},\bar{a},\bar{b}\}$.

Решение. а) Покажем,что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ линейно независимы. Для этого достаточно доказать, что определитель, построенный на этих векторах отличен от нуля.

$$\Delta(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}2&4&6\\3&2&5\\1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&0\\3&-1&-4\\1&0&0\end{vmatrix}=-4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix}=-8.$$

Определитель не равен нулю, поэтому векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ линейно независимы и образуют базис.

б) Найдем разложение вектора $\bar{m}$ по базисным векторам.

$$\bar{m}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c},\ \begin{pmatrix}6\\9\\4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix}.$$

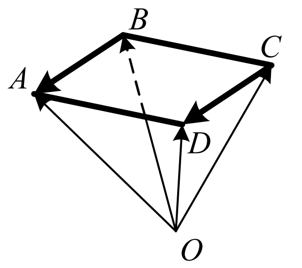
Систему решим методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\2&4&6&6\\3&2&5&9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\0&2&0&-2\\0&-1&-4&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\0&1&0&-1\\0&0&-4&-4\end{array}\right),$$ откуда

$\gamma=1,\ \beta=-1,\ \alpha=2$ и $\overline{m}=(2,-1,1)$ в $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$.

в) $\overline{m}=2\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$, поэтому $\overline{m}=(1,2,-1)$ в $\{\overline{c},\overline{a},\overline{b}\}$.

Пример 4. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1,2,3)$, $B(3,4,4)$, $C(4,2,8)$ в декартовой системе координат. Найти координаты четвертой вершины D. Найти длину диагонали AC .



Решение. $\overline{r}_D=\overline{r}_C+\overline{CD}=\overline{r}_C+\overline{BA}=$
$=\overline{r}_C+(\overline{r}_A-\overline{r}_B)=\overline{r}_C+\overline{r}_A-\overline{r}_B$, тогда

$$\overline{r}_D=\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\7\end{pmatrix}$$ и

$D(2,0,7)$.

Рис. 4.11.

$\overline{AC}=\overline{r}_C-\overline{r}_A=(4-1,2-2,8-3)=(3,0,5)$.

$|\overline{AC}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}.$

Пример 5. Вектор $\overline{a}$, длина которого равна 6, образует с вектором $\overline{i}$ угол 60^0, а с вектором $\overline{k}$ угол 135^0. Найти координаты вектора $\overline{a}$, если он образует с ортом $\overline{j}$ тупой угол.

Решение. $\alpha=60^0,\gamma=135^0,\beta>90^0$.

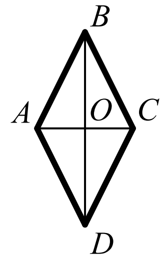
$\overline{a}=|\overline{a}|\overline{a}^0=|\overline{a}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=6(\cos60^0,\cos\beta,\cos135^0)=$

$=6\left(\frac{1}{2},\cos\beta,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. $\overline{a}^0=\left(\frac{1}{2},\cos\beta,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, тогда

$\frac{1}{4}+\cos^2\beta+\frac{1}{2}=1$, $\cos^2\beta=\frac{1}{4}$ и $\cos\beta=\pm\frac{1}{2}$. Так как $\beta>90^0$, то

$\cos\beta=-\frac{1}{2}$, $\overline{a}=6\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(3,-3,-3\sqrt{2})$.

Пример 6. Дан ромб $ABCD$ с вершинами $B(9,7)$ и $D(1,1)$. Найти координаты остальных вершин ромба, если длина диагонали AC равна 30. (Обход вершин по часовой стрелке.)



Решение. $\overline{r}_O=(\overline{r}_B+\overline{r}_D)/2=(5,4)$.

$\overline{OB}=\overline{r}_B-\overline{r}_O=(4,3)$, $|\overline{OB}|=\sqrt{16+9}=5$,

$|\overline{OA}|=15=3|\overline{OB}|$. $\overline{OA}=3\overline{OB}_{+\frac{\pi}{2}}=3(-3,4)=(-9,12)$

$\overline{r}_A=\overline{r}_O+\overline{OA}=(-4,16)$

$\overline{r}_C=\overline{r}_O+\overline{OC}=\overline{r}_O-\overline{OA}=(14,-8)$.

Рис. 4.12.

Пример 7. Найти длину биссектрисы $\overline{AK}$ треугольника ABC, если $A(-2,2)$, $B(1,4)$ и $C(6,-10)$. Найти $\angle BAK$.

Решение. $\overline{AB}=(3,2)$, $\overline{AC}=(8,-12)$, $|\overline{AB}|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$,

$|\overline{AC}|=4\sqrt{4+9}=4\sqrt{13}$. Биссектриса делит противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон, поэтому $\overline{BK}=\frac{1}{4}\overline{KC}$,

$K\left(\frac{1+0.25\cdot6}{1+0.25},\frac{4-0.25\cdot10}{1+0.25}\right)$, $K(2;1.2)$ и $\overline{AK}=(4;-0.8)$,

$|\overline{AK}|=\sqrt{16+0.64}=\sqrt{16.64}$.

$$\cos\angle BAK=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AK}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AK}|}=\frac{3\cdot4-2\cdot0.8}{\sqrt{13}\sqrt{16.64}}=\frac{104}{\sqrt{13}\sqrt{1664}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\angle BAK=45^0$.

Экспресс-самопроверка.

1. Коллинеарны ли векторы $\overline{a}=(2,1,-4)$, $\overline{b}=(-4,-2,8)$?

2. Даны точки $A(1,3,4)$ и $B(3,1,5)$.

Найти:

а) координаты вектора $\overline{AB}$;

б) длину вектора $\overline{AB}$;

в) орт вектора $\overline{AB}$;

г) $\cos\beta$.

3. Даны точки $A(1,3,4)$ и $B(3,1,8)$. Найти координаты точки, которая делит отрезок AB пополам.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.1. Найти направляющие углы вектора составляющего равные острые углы с осями координат.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4.2. Даны векторы , $\overline{a}=(2,1,4)$, $\overline{b}=(5,3,6)$, $\overline{c}=(3,2,1)$.

а) Показать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис.

б) Найти координаты вектора $\overline{m}=(3,1,13)$ в базисе $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$.

в) Найти координаты вектора $\overline{m}$ в базисе $\{\overline{c},\overline{b},\overline{a}\}$.

Ответ: $\overline{m}=(1,2,-3)$ в базисе $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$

$\overline{m}=(-3,2,1)$ в базисе $\{\overline{c},\overline{b},\overline{a}\}$.

4.3. Даны вершины параллелограмма $A(4,1,2)$, $B(1,2,3)$ в декартовой системе координат. Найти координаты других вершин параллелограмма, если $O(2,3,1)$- точка пересечения диагоналей.

Ответ: $C(0,5,0)$, $D(3,4,-1)$.

4.4. Вектор $\overline{a}$, длина которого равна 4, образует с вектором $\overline{j}$ угол 60^0, а с вектором $\overline{k}$ угол 150^0. Найти координаты вектора $\overline{a}$.

Ответ: $\overline{a}=(0,2,-2\sqrt{3})$.