Исследовательская Работа

ГОМОТЕТИЯ

Ученицы 11 М Школы №32
Соловьева Алена
и Киселева Яна

Учитель Стаханова Полина Александровна

Ижевск 2012

Содержание

Введение

Тема работы посвящена гомотетии. Эти замечательное понятие хоть и входит в программу школьного курса геометрии средней школы, но про гомотетию говорится вскользь и недостаточно подробно. Однако при решении целого класса задач это понятие позволяет получить красивое решение, в то время когда традиционные подходы приводят к громоздким и утомительным преобразованиям.

Актуальность, новизна исследования.

1. Данная тема является дополнением и углублением изученных в курсе геометрии свойств.
2. Применение опыта решения планиметрических задач с использованием гомотетии помогает повысить уровень пространственного воображения и уровень логической культуры.
3. Изучение данной темы поможет более глубоко подготовиться к вступительным экзаменам и успешному участию в математических конкурсах и олимпиадах.
4. Данная работа может быть использована для проведения практических занятий на элективных курсах с учащимися выпускных классов и при подготовке к Единому Государственному Экзамену и поступлению в ВУЗ.

Работа состоит из двух частей: в первой части – теоретической - рассказывается, что такое гомотетия, формулируются и доказываются некоторые ее свойства. Во второй - практической части - рассмотрены задачи, которые можно решать с помощью гомотетии. К сожалению, гомотетия используется очень редко, а ведь она может существенно помочь нам в решении задач.

Цель работы: исследование гомотетии и её свойств, а также применение гомотетии при решении задач.

Методы исследования:

1) Изучение теории
2) Доказательства некоторых свойств гомотетии
3) Установление связи между гомотетией и решением задач
4) Выполнение практической части

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

(Литературный обзор)

Гомотетией пространства с центром *O* и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование пространства, при котором любая точка *X* отображается на такую точку *X`* , что $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$.

Гомотетию с центром *O* и коэффициентом *k* обозначают H_O^k . Если при этой гомотетии точка *X* отображается на точку *X`*, то пишут или и говорят, что точка *X`* гомотетична точке *X*. Аналогично определяются гомотетичные фигуры.
Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. Геометрия 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики.

<u>Определения из учебников</u>

А. В. Погорелов. Геометрия: Учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений.
Гомотетия относительно центра *O* с коэффициентом *k* гомотетии --- это преобразование, которое переводит произвольную точку *X* в точку *X`* луча *OX* , такую, что *OX`=k·OX.*
В учебнике рассматривается гомотетия только с положительным коэффициентом.

В.М.Клопский, З.А.Скопец, М.И.Ягодовский. Геометрия. Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы .
Гомотетией с центром *O* и коэффициентом *k* называется преобразование пространства, при котором образом произвольной точки *X* является такая точка *X`*, что $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$.

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселева, Э. Г. Позняк. Геометрия: Учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений .
Центральным подобием с центром *O* и коэффициентом $k \neq 0$ называется отображение пространства на себя, при котором каждая точка *X* переходит в такую точку *X`*, что $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$
Обобщив всё выше перечисленное, подведём итог.

Определение гомотетии.

Пусть на плоскости задана некоторая точка O и задано некоторое действительное число k, неравное нулю.

Гомотетией (или перспективно-подобным преобразованием, или центрально-подобным преобразованием) с центром в точке O и коэффициентом k называется такое преобразование фигуры, при котором:

1. Каждой точке X, отличной от O, этой фигуры сопоставляется такая точка X', что:
    - точки O, X, и X' лежат на одной прямой;
    - длина отрезка OX' в $|k|$ раз больше длины отрезка OX, т.е. OX' = $|k| \cdot OX$;
    - отрезки OX и OX' одинаково направлены, если $k>0$, и противоположно направлены, если $k<0$.
2. Точке O сопоставляется эта же точка.

Запишем эти условия короче: $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$. Гомотетию с центром O и коэффициентом k будем обозначать так: H_O^k.

Итак, по определению

$$H_O^k(X) = X' \Leftrightarrow \overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}.$$

На рисунке 1 изображены точки A, B, C и их образы соответственно A', B', C' в H_O^3. Здесь $OA' : OA = OB' : OB = OC' : OC = 3$.

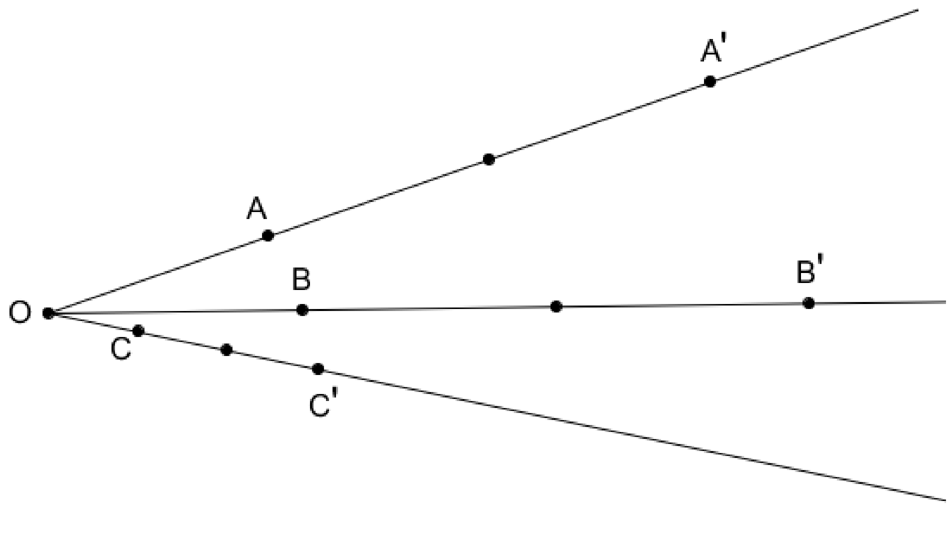
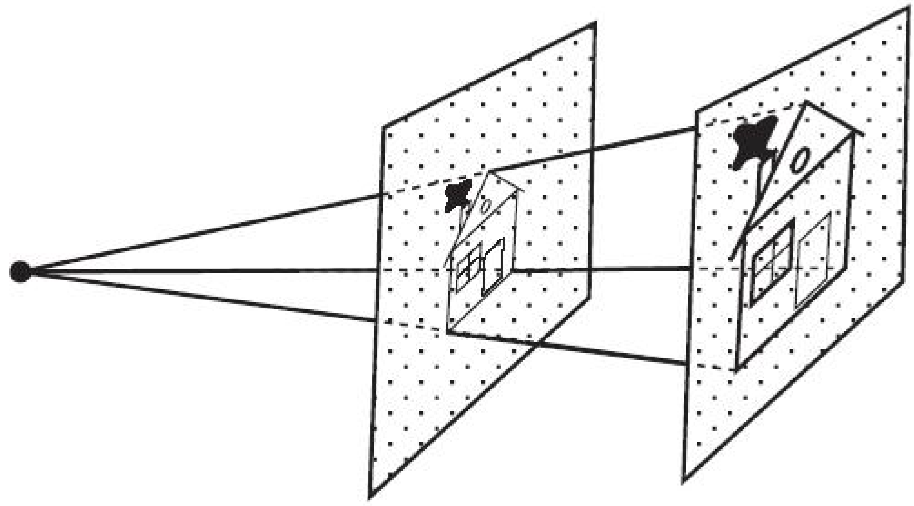


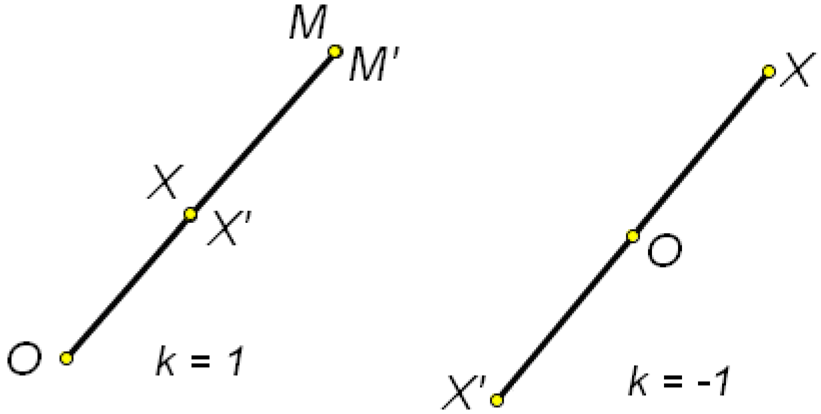
Рис. 1

Если в некоторой гомотетии точке X ставится в соответствие некоторая точка X', то говорят, что точка X' *гомотетична* точке X. Аналогично, если некоторая гомотетия преобразует какую-либо фигуру Φ в фигуру Φ', то фигуру Φ' называют гомотетичной фигуре Φ.

Гомотетичные фигуры:



Рассмотрим частные примеры гомотетии.



1. $k=1$. В этом случае $\overline{OX'} = \overline{OX}$, т.е. точка X' совпадает с точкой X (при любом выборе X). Другими словами, каждая точка плоскости преобразуется в себя. Таким образом, при $k=1$ гомотетия представляет собой *тождественное преобразование плоскости*.
2. $k=-1$. $\overline{OX'} = -\overline{OX}$. Точка X' симметрична точке X относительно центра гомотетии. В этом случае гомотетия является симметрией относительно точки O.
3. $H_O^k(O) = O$, т.к. $k \cdot \overline{OO} = \overline{OO}$. Значит, *центр гомотетии является ее неподвижной точкой.*

Наглядно можно представить себе гомотетию при $k>1$ как *растяжение* плоскости от точки O, а при $0<k<1$ – как *сжатие* плоскости к центру гомотетии.

Гомотетия называется прямой при $k>0$ и обратной при $k<0$.

В случае прямой гомотетии точка и ее образ располагаются по одну сторону от центра, в случае обратной гомотетии – по разные стороны.

Если существует гомотетия, преобразующая данную фигуру Φ в некоторую другую данную фигуру Φ', то эти фигуры называют *перспективно-подобными* или *подобными* и *подобно-расположенными*, а центр гомотетии называется *центром подобия* этих фигур. В случае, когда каждая точка фигуры Φ и соответственная ей точка фигуры Φ' располагаются по одну сторону от центра подобия (гомотетия прямая), центр подобия называется *внешним* (рисунок а). Если же соответственные точки перспективно-подобных фигур располагаются по разные стороны от центра подобия (гомотетия обратная), то центр подобия называется *внутренним* (рисунок б).

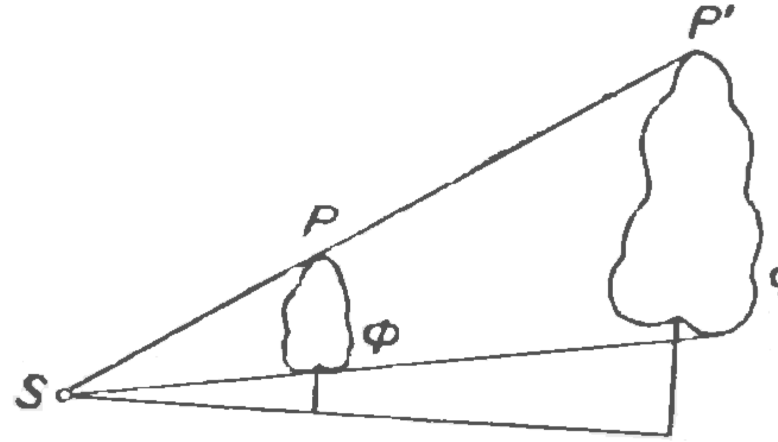


рис. а

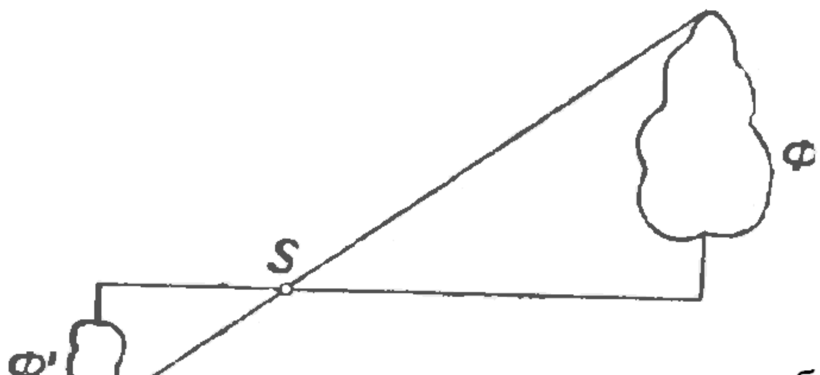


рис. б

Основные свойства гомотетии.

Свойство 1. *Гомотетия является взаимно однозначным преобразованием.*

В самом деле, для каждой точки X' существует единственная точка X на прямой OX', такая, что $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$. Другими словами, для каждой точки X' существует единственный прообраз.

Свойство 2. *Всякая прямая, проходящая через центр гомотетии, преобразуется в себя* (это вытекает из определения гомотетии и свойства 1).

Свойство 3. *Луч, исходящий из центра гомотетии, преобразуется:*

- *в себя, если гомотетия прямая;*
- *в луч, симметричный рассматриваемому относительно центра гомотетии, если гомотетия обратная.* (по определению гомотетии и свойству 1).

Свойство 4. *Отрезок, соединяющий две произвольные точки плоскости, не лежащие на одной прямой с центром гомотетии, и отрезок, соединяющий образы этих точек, параллельны*.

Доказательство.

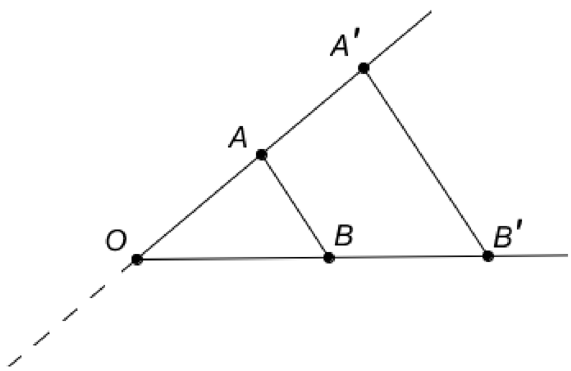


Рис. 2

Пусть точкам *A* и *B* сопоставлены соответственно точки A' и B' (рисунок 2). Тогда $OA' = |k| \cdot OA$ и $OB' = |k| \cdot OB$ $\Rightarrow$ $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$. Значит, прямые *AB* и $A'B'$ отсекают на сторонах угла *AOB* пропорциональные отрезки. Отсюда AB и $A'B'$ параллельны, $A'B' = |k| \cdot AB$.

Примечание. $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}$, если гомотетия прямая, и $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{A'B'}$, если гомотетия обратная.

На самом деле, прямая AA' делит плоскость на две полуплоскости α_1 и α_2. Луч OB принадлежит одной из этих полуплоскостей, предположим, α_1. Если гомотетия прямая, то точка B' принадлежит тому же лучу, и той же полуплоскости α_1. Это значит, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ лежат по одну сторону от прямой AA', соединяющей их начала, $\Rightarrow \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}$. Аналогично, в случае обратной гомотетии $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{A'B'}$ (рисунок 3).

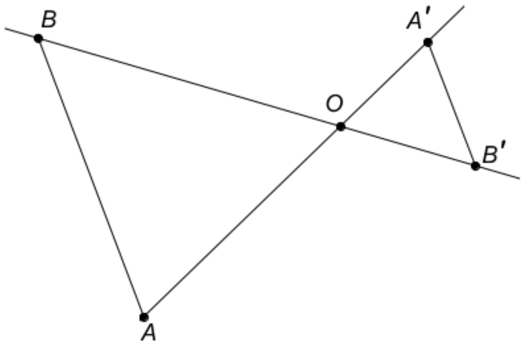


Рис. 3

Свойство 5. *Всякая прямая, не проходящая через центр гомотетии, преобразуется в параллельную ей прямую* (если $k \neq 1$).
Доказательство.

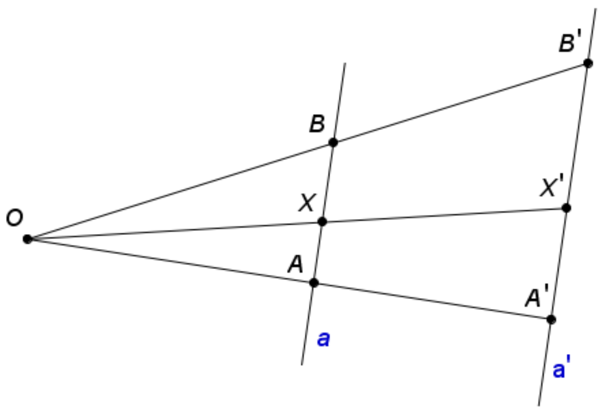


Рис. 4

Пусть прямая *a* не проходит через центр гомотетии *O*, т. $A \in a$ и т. $B \in a$, а A' и B' - гомотетичные им точки. Прямую $A'B'$ обозначим a' (рисунок 4). Если т. $X \in a$, X' образ т. *X*, то по свойству 4 $A'B' \parallel AB$ и $A'X' \parallel AX$. Т.е. прямые $A'X'$ и $A'B'$ проходят через точку A' параллельно одной и той же прямой. Значит, они совпадают, и т. $X' \in a'$. Итак, всякая точка прямой *a* преобразуется в некоторую точку прямой a'.

Обратно: пусть $X' \in a'$, $X'O \cap a'$. $a \parallel a'$, $X'O \cap a = X$. Очевидно, что именно точка *X* преобразуется в данную точку X'. $\Delta OA'X'$ и ΔOAX подобны, $\Rightarrow OX'$: $OX = OA' : OA = |k|$. (Ясно, что т. *X* и X' располагаются по одну сторону от *O* в случае прямой гомотетии, и по разные стороны в случае обратной). Таким образом, каждая точка прямой a' служит образом некоторой точки прямой *a*.

Свойство 6. *При гомотетии параллельные прямые преобразуются в параллельные же прямые.*
Доказательство:
На самом деле, пусть прямая *a* параллельна прямой *b* и некоторая гомотетия преобразует эти прямые соответственно в прямые a' и b'. Тогда прямые a' и b' не могут иметь общих точек, т.к. прообраз общей точки лежал бы как на

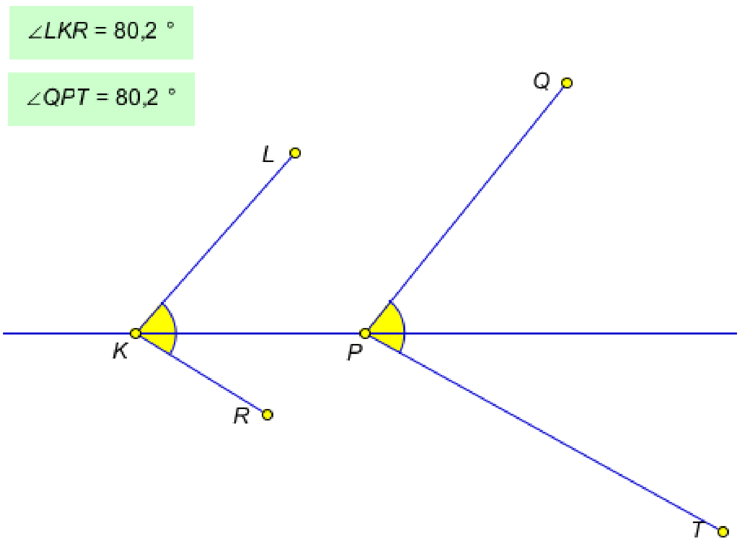
прямой a, так и на прямой b. Но эти прямые общих точек не имеют по условию.

Свойство 7. *При гомотетии отрезок преобразуется в отрезок.*
Доказательство:
Пусть AB – какой-либо отрезок, A' и B' - точки, соответственно гомотетичные точкам A и B. $P \in AB$, т. P' гомотетична т. P. AP+PB=AB по условию.
По свойству 4 $A'P' + P'B' = |k| \cdot AP + |k| \cdot PB = |k| \cdot (AP + PB) = |k| \cdot AB = A'B'$, т.е. $A'P' + P'B' = A'B'$, а это возможно только тогда, когда т. $P' \in A'B'$ (в противном случае $A'P' + P'B' > A'B'$). Значит, каждая точка отрезка AB преобразуется в точку отрезка $A'B'$. Аналогично каждая точка отрезка $A'B'$ гомотетична некоторой точке отрезка AB.

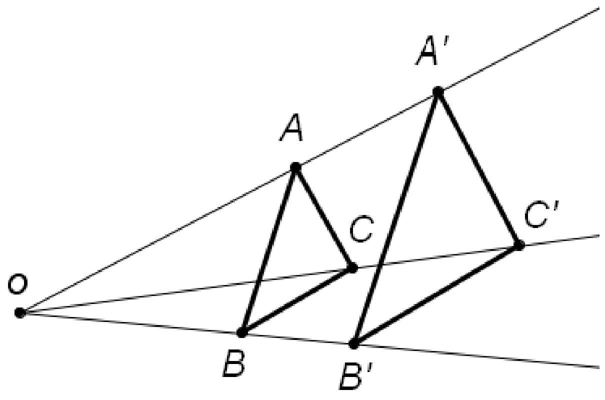
Свойства 8 и 9 вытекают из определений и доказанных свойств:

Свойство 8. *При гомотетии луч переходит в луч*, причем луч и его образ направлены одинаково в случае прямой гомотетии и противоположно в случае обратной гомотетии.

Свойство 9. *При гомотетии угол преобразуется в равный ему угол.*

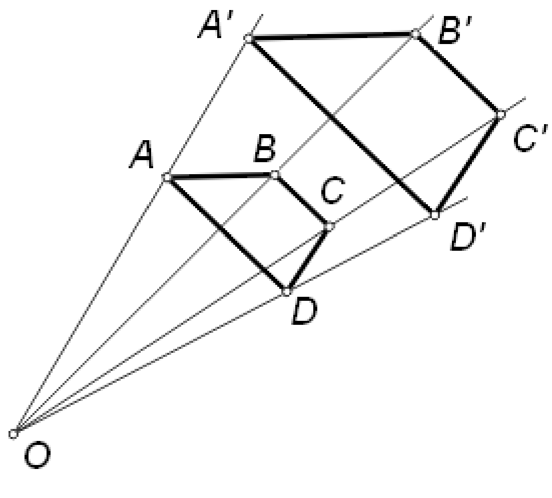


Свойство 10. *При гомотетии треугольник преобразуется в подобный ему треугольник.*



Доказательство:
Пусть вершины треугольника ABC преобразуются соответственно в точки A', B' и C'. По свойству 7 стороны треугольника ABC преобразуются соответственно в стороны треугольника $A'B'C'$, и $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{A'C'}{AC} = |k|$. Значит, треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

Свойство 11. *При гомотетии многоугольник преобразуется в подобный ему многоугольник.*
Доказательство:
Каждая вершина многоугольника $ABCD$ преобразуется соответственно в т. A', B', C', D' соответственно. По свойству 7 стороны многоугольника $ABCD$ преобразуются соответственно в стороны многоугольника $A'B'C'D'$, и $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD} = |k|$. Значит, многоугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подобны.



Гомотетия окружностей

Всякая гомотетия отображает окружность на окружность, так как при гомотетии все расстояния умножаются на одно и то же число – модуль коэффициента гомотетии.

Свойства гомотетичных окружностей.

Свойство 1. *При гомотетии всякая окружность ω преобразуется в некоторую окружность ω', причём центр окружности ω преобразуется в центр окружности ω', а отношение радиуса окружности ω' к радиусу окружности ω равно абсолютной величине коэффициента гомотетии.*

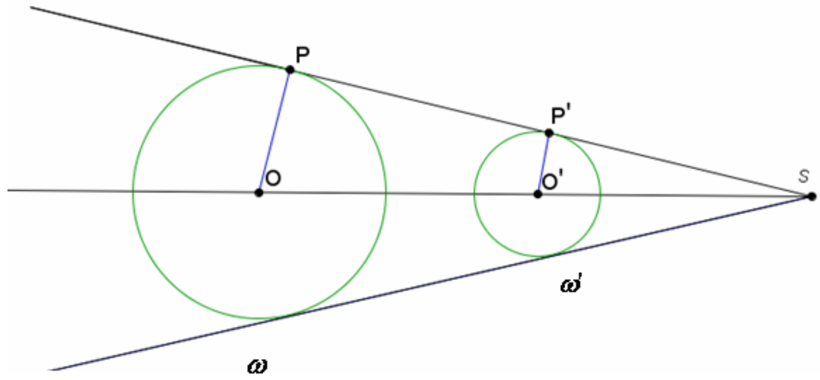


Рис. 5

Доказательство.
Пусть ω (O, R) – данная окружность, P – произвольная её точка, O' и P' - точки, гомотетичные соответственно точкам O и P (рисунок 5). Тогда по свойству 4, $O'P' = k \cdot OP$, т.е. $O'P' = k \cdot R$. Итак, точка P', гомотетичная произвольной точке P данной окружности ω, лежит на окружности ω' (O', P'), причём $R' = k \cdot R$, что и требовалось доказать.

Свойство 2. *Две несовпадающие окружности имеют не более одного внешнего центра подобия.*

Доказательство.
Пусть прямая гомотетия H_S^k преобразует данную окружность ω_1(O_1, R_1) в другую данную окружность ω_2(O_2, R_2) (рисунок 6). Докажем, что в этом случае точка S совпадает с точкой, делящей отрезок O_1O_2 внешним образом в отношении R_2:R_1, т. е. SO_2:SO_1 = R_2:R_1. Прежде всего заметим, что центр гомотетии S должен лежать на линии центров, т. е. на прямой, проходящей через точки O_1 и O_2. Чтобы показать это, проведём прямую через S и O_1. Она пересечёт окружность ω_1 в двух точках A и B. Но тогда она должна пересечь и окружность ω_2 в точках A' и B', соответственно гомотетичных точкам A и B. Пусть теперь P – произвольная точка окружности ω_1, отличная от точек A и B. Тогда гомотетичная ей точка P' должна лежать на окружности ω_2 и,

следовательно, является одной из точек пересечения окружностей ω_2 и прямой *SP*. Соединим *P* с *A* и *B*, а P' - с A' и B'.

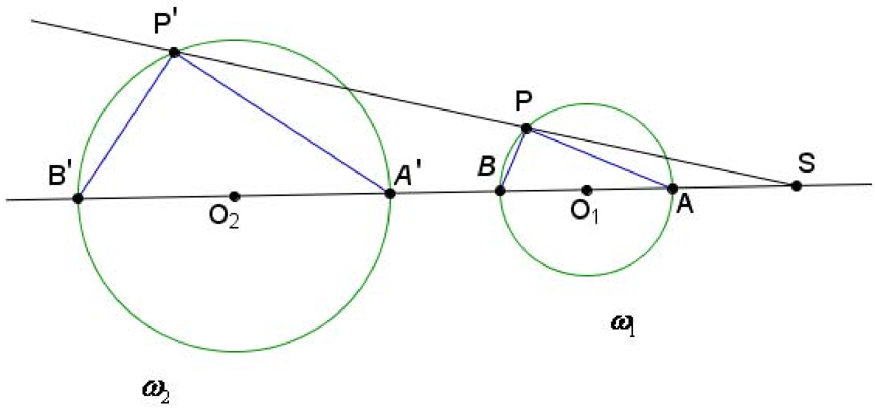


Рис. 6

Тогда угол $A'P'B'$ должен быть равен углу *APB*. Но *APB* = 90^0, т.к. *AB* – диаметр окружности ω_1; значит $A'B'$ - диаметр ω_2. При гомотетии середина отрезка *AB* преобразуется в середину отрезка $A'B'$, т.е. O_1 преобразуется в O_2. Отсюда вытекает, что точки *S*, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

Коэффициент гомотетии $k = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{R_2}{R_1}$.

Таким образом, $\dfrac{SO_2}{SO_1} = \dfrac{R_2}{R_1}$.

Теорема доказана, т. к. существует только одна точка, делящая отрезок внешним образом в данном отношении.

Свойство 3. *Если две неравные окружности имеют общую внешнюю касательную, то она проходит через внешний центр подобия* (рисунок 7).

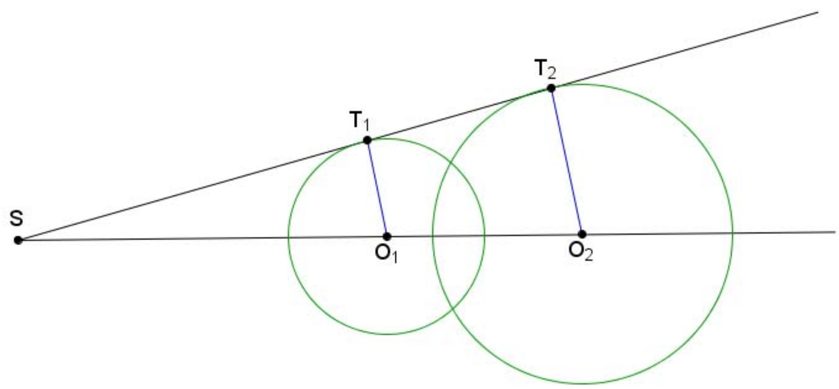


Рис. 7

Построение гомотетичных фигур.

Построение фигуры, гомотетичной данной, в простейших условиях сводится к построению точек, гомотетичных данным. Поэтому сначала выясним, как может быть построена точка, гомотетичная данной, при различных способах задания гомотетии.

1. *Гомотетия задана центром O и парой соответственных точек A и* A' (точки *O*, *A* и A' расположены на одной прямой). Пусть т. $P \notin OA$. Проведем через т. A' прямую, параллельную *AP*, и пусть P' - точка пересечения ее с прямой *OP*. Тогда т. P' и является образом точки *P* в данной гомотетии (рисунок 8).

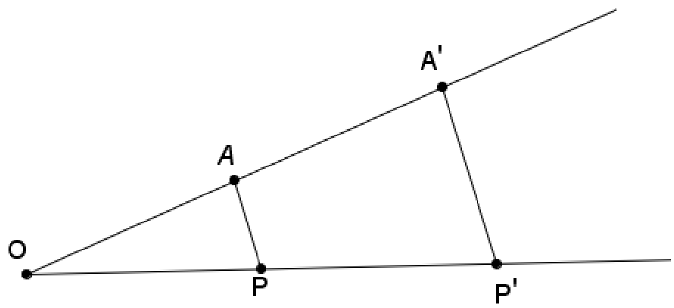


Рис. 8

Если же т. $P \in OA$, то сначала выберем произвольную т. $Q \notin OA$ и построим гомотетичную ей т. Q'. Затем, используя пару гомотетичных точек *Q* и Q', построим искомую точку P' описанным выше способом.

2. *Гомотетия задана двумя парами соответственных точек*. Пусть заданы т. *A*, *P* и соответственные им т. A', P' (рисунок 8). При этом $AP \| A'P'$, исключая случай, когда все эти точки лежат на одной прямой. Кроме того, эти отрезки должны быть неравными или же равными, но противоположно направленными. Из этих условий легко определить центр гомотетии как точку пересечения прямых AA' и PP', а затем поступать так, как в первом случае.
3. *Гомотетия задана центром и коэффициентом*. Пусть коэффициент гомотетии задан как отношение данных отрезков *m* и *n*, т.е. $k = \frac{m}{n}$. Этот случай без труда сводится к первому. Проведем из т. *O* произвольный луч *l* (рисунок 9) и отложим на нем отрезки $OA = n, OA' = m$. Очевидно, что т. *A* и A' являются соответственными в данной гомотетии, так что мы пришли к первому случаю. На рисунке показано построение т. P', гомотетичной т. *P*.

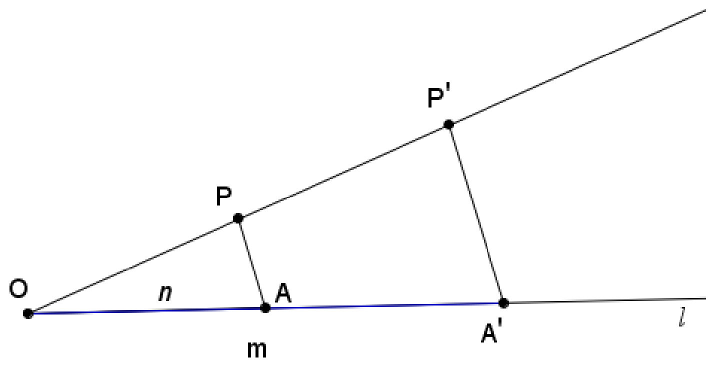


Рис. 9

Если коэффициент гомотетии задан как отношение двух натуральных чисел, например $k = \frac{p}{q}$, где p и q – натуральные числа, то выбираем произвольный отрезок d и строим два отрезка: $m = pd$ и $n = dq$. Отсюда $k = \frac{m}{n}$, и задача свелась к рассмотренному случаю.

Пусть теперь требуется построить отрезок, гомотетичный данному отрезку PQ относительно центра O, если коэффициент $k = \frac{m}{n}$, где m и n – данные отрезки.

Отложим на произвольном луче, исходящем из т. O, отрезки $OA = n, OA' = m$. Ясно, что т. A' будет гомотетична т. A в рассматриваемой гомотетии.

Затем строим т. P' и Q', гомотетичные точкам P и Q (рисунок 10). Отрезок $P'Q'$ искомый.

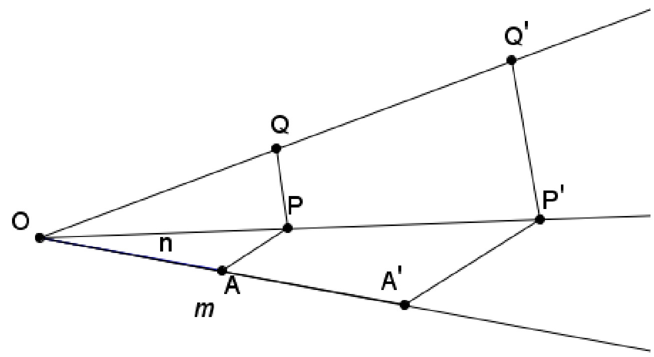


Рис.10

Если т. P и Q не лежат на одной прямой с т. O, то можно сначала ранее указанным способом построить т. P', гомотетичную т. P, а затем провести через т. P' прямую, параллельную PQ. Пусть Q' - точка ее пересечения с прямой OQ. Отрезок $P'Q'$ искомый.

Построение многоугольника, гомотетичного данному, сводится к предыдущему построению.

На рисунке 11 показано построение треугольника, соответствующего ΔPQR в $H_O^{m/n}$. Здесь $OA = n, OA' = m$, $A'P' \| AP, P'Q' \| PQ, Q'R' \| QR$.

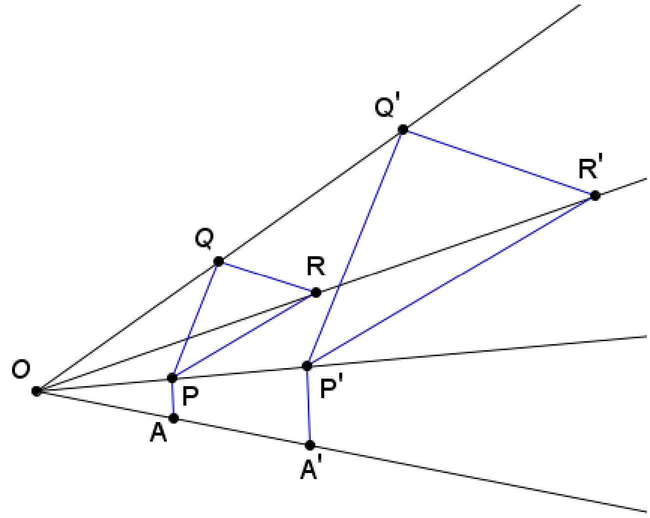
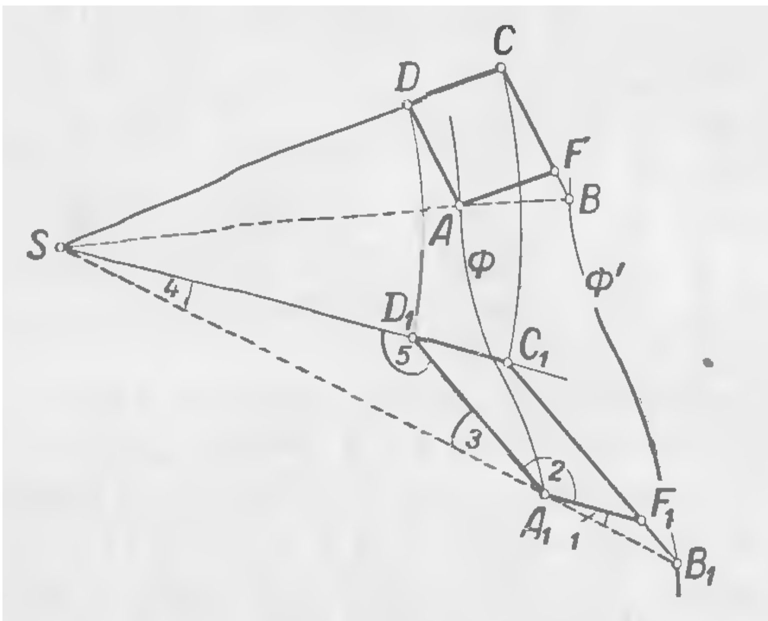


Рис. 11

Пантограф

Существует механизм, который даёт возможность вычертить фигуру, перспективно-подобную любой заданной фигуре, притом с любым положительным коэффициентом подобия. Это - пантограф. Впервые он был создан вначале 17 века.



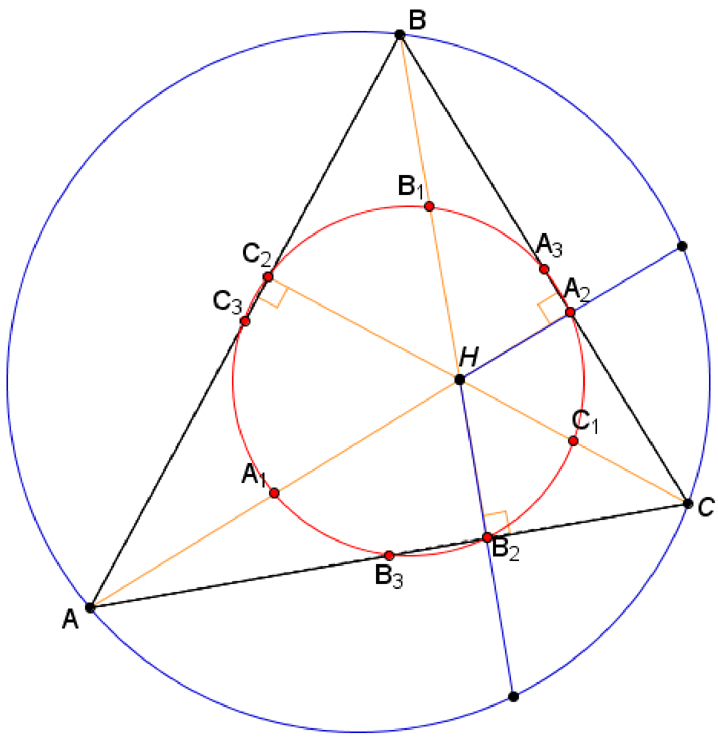
Пантограф состоит из четырёх стержней SC, BC, DA и AF, скреплённых шарнирно в точках D, C, F и A. Эти точки выбираются так, что в некотором начальном положении пантографа четырёхугольник ADCF - параллелограмм, причём точки A и B лежат на одном луче, исходящем из точки S. Точка S закрепляется на плоскости неподвижно. Пусть длины стержней BC и AD равны соответственно m и n. Когда точка A опишет какую - либо фигуру Ф, то точка B опишет некоторую фигуру Ф', соответствующую фигуре Ф в гомотетии с центром S и коэффициентом $k = m/n$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задача №1.
Доказать, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков высот от вершин до точки их пересечения лежат на одной окружности.

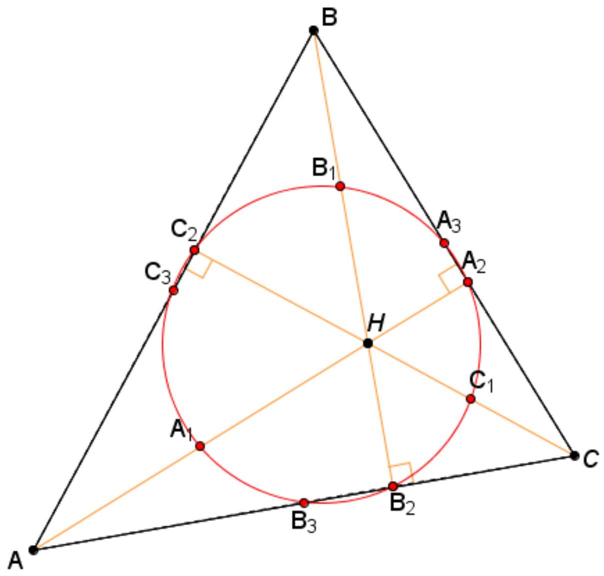
Дано: ΔABC, H - точка пересечения его высот,
A_1, B_1, C_1 - середины отрезков AH, BH, CH;
AA_2, CC_2, BB_2 - высоты,
A_3, B_3, C_3 – середины сторон треугольника.
Доказать: A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности.

Доказательство:
1. Дополнительное построение: описанная окружность ω.
2. Т. к. точки, симметричные ортоцентру H ΔABC относительно его сторон, лежат на одной окружности, то вписанная окружность есть образ описанной окружности при гомотетии с центром H.



ω

3. $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ (т. к. окружности гомотетичны)
   и $\Delta B_1A_2C_1 = \Delta B_1HC_1$, $\Rightarrow \angle B_1A_2C_1 = \angle B_1HC_1 = 180° - \angle BAC$, т. е.
   A_1, B_1, A_2, C_1 лежат на одной окружности.
4. $\angle B_1A_3C_3 = \angle B_1HC_1 = 180° - \angle BAC$, т.е.
   A_1, B_1, A_3, C_1 лежат на одной окружности.



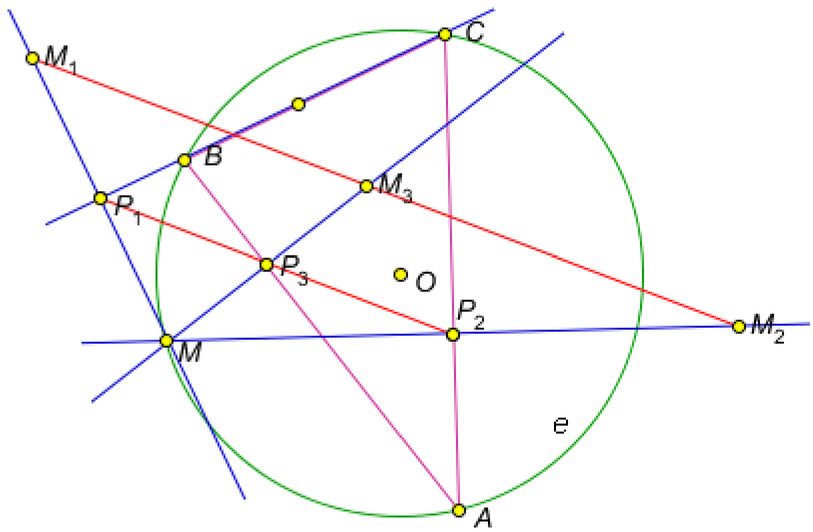
5. из пунктов 3 и 4 следует, что A_1, B_1, C_1, A_2, A_3 лежат на одной окружности,
   а т.к. A_2 и A_3 лежат, то и B_2, B_3 и C_2, C_3 тоже лежат на ней.

Что и требовалось доказать.

Задача №2.
Доказать, что ортогональные проекции точки, принадлежащей описанной около треугольника окружности, на прямые, содержащие его стороны, коллинеарны (теорема Симсона).

Доказательство:

1. Дополнительное построение: описанная окружность e, точка M ;



2. Пусть P_1, P_2, P_3 - ортогональные проекции M на прямые AB, CB, CA;
3. Построим M_1, M_2, M_3 симметричные точке M относительно этих прямых.
4. M_1, M_2, M_3 лежат на одной прямой, т. к. проходят через ортоцентры;
5. т. к. P_1, P_2, P_3 - ортоцентры, то они делят MM_1, MM_2, MM_3 пополам соответственно,

   $\Rightarrow$ гомотетия $H_M^{1/2}$ отображает M_1, M_2, M_3 на P_1, P_2, P_3, которые принадлежат прямой,
   являющейся образом M_1M_2.

Что и требовалось доказать.

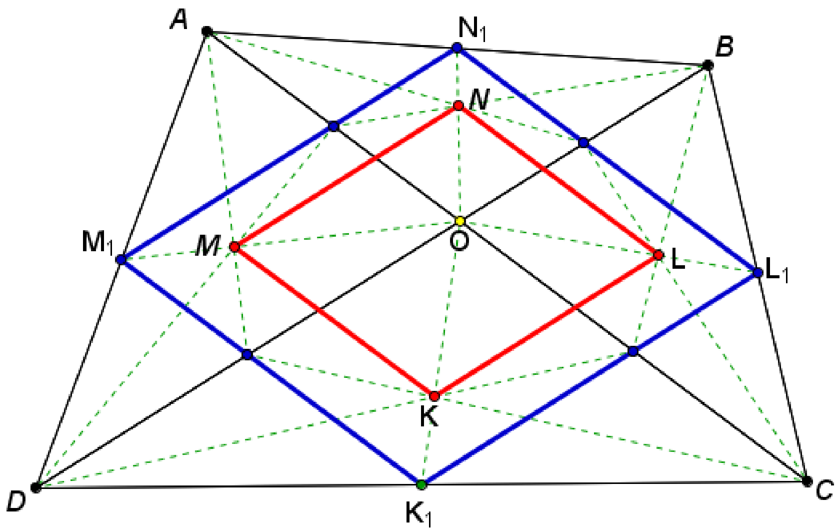
Задача № 3.

Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что их точки пересечения медиан образуют параллелограмм.

<u>Дано</u>: $ABCD$ – четырехугольник; $BD \cap AC = O$; N, L, K, M – точки пересечения медиан $\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta COD, \Delta DOO$ соответственно.

<u>Доказать:</u> $NLKM$ – параллелограмм.

<u>Доказательство:</u>



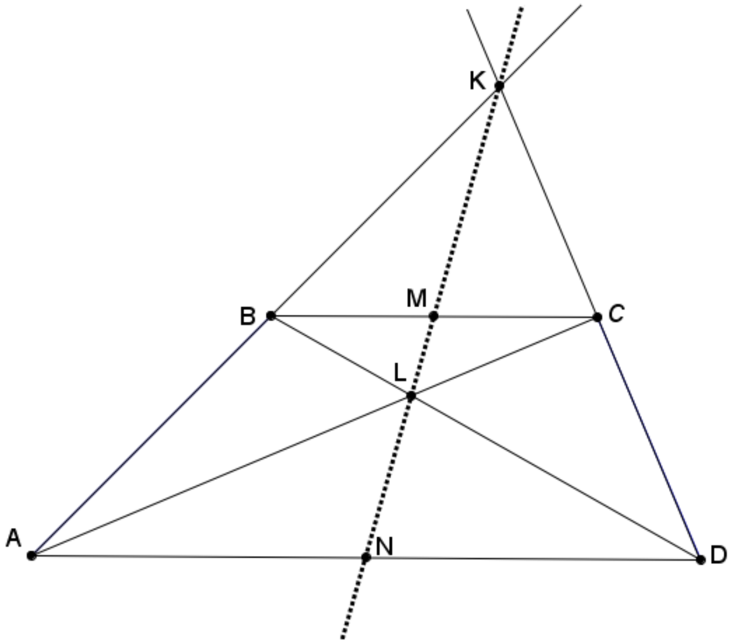
1. Рассмотрим гомотетию $H_O^{3/2}$. Тогда точки N, L, K, M перейдут в точки N_1, L_1, K_1, M_1 соответственно, а полученные точки будут являться серединами сторон четырехугольника. Кроме того, четырехугольник $NLKM$ будет гомотетичен четырехугольнику $N_1 L_1 K_1 M_1$.
2. Т.к. L_1, K_1 – середины сторон, то $L_1 K_1$ – средняя линия ΔDBC, $\Rightarrow K_1L_1 \| DB$. Аналогично, M_1N_1 – средняя линия $\Delta ABD, \Rightarrow M_1N_1 \| DB$. Значит, $K_1L_1 \| M_1N_1$. $N_1 L_1$ – средняя линия $\Delta ABC, \Rightarrow N_1L_1 \| AC$, $M_1 K_1$ – средняя линия $\Delta DAC, \Rightarrow M_1K_1 \| AC$. Значит, $N_1L_1 \| K_1M_1$.
3. Получается, что в четырехугольнике $N_1 L_1 K_1 M_1$ противоположные стороны попарно параллельны, $\Rightarrow N_1L_1K_1M_1$ - параллелограмм, а значит и гомотетичный ему четырехугольник $NLKM$ – параллелограмм.

Что и требовалось доказать.

Задача № 4.

Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K, а её диагонали—в точке L. Докажите, что точки K, L, M и N, где M и N— середины оснований BC и AD, лежат на одной прямой.

Дано: $ABCD$ – трапеция, $AB \cap DC = K$, $AC \cap DB = L$. Т. M – середина BC, N – середина AD.
Доказать: т. K, L, M, N лежат на одной прямой.
Доказательство:

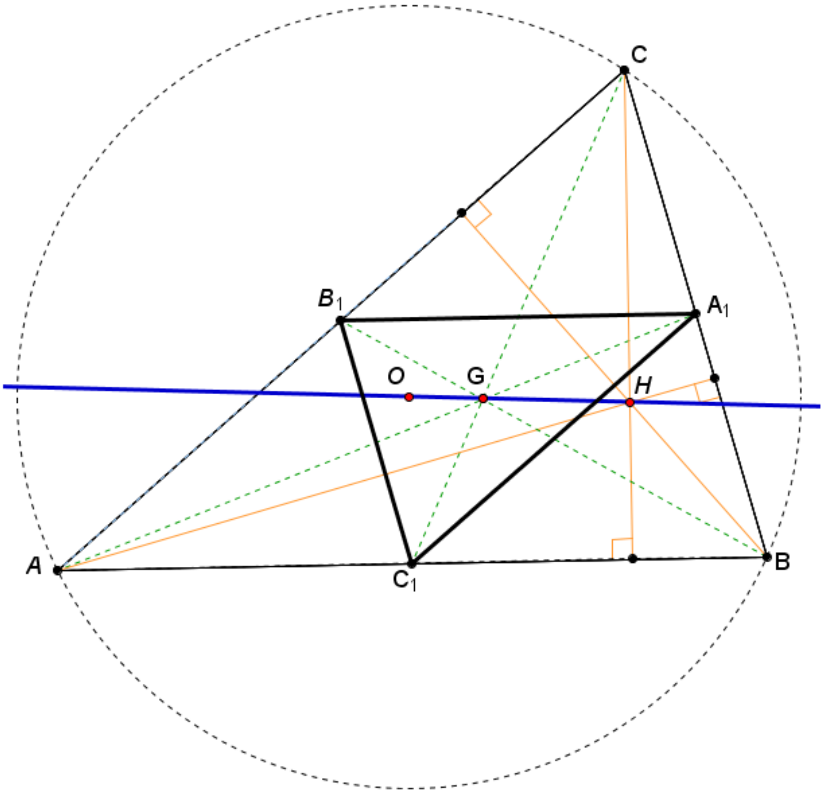


1. При гомотетии с центром K ΔBKC перейдет в ΔAKD, значит, т. M перейдет в т. N. $\Rightarrow K \in MN$.
2. При гомотетии с центром L ΔLBC перейдет в ΔLDA, а т. M – в т. N. $\Rightarrow L \in MN$.
3. Отсюда следует, что $L, K \in MN, \Rightarrow$ т. K, L, M, N лежат на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

Задача № 5.
Доказать, что в неравностороннем треугольнике ABC центроид G, ортоцентр H и центр O описанной окружности лежат на одной прямой, причем $\overline{GH} = 2\overline{OG}$.

Дано: ΔABC, т. G – центроид, т. H – ортоцентр, т. O – центр описанной окружности.
Доказать: т. G, H, O лежат на одной прямой.
Доказательство:



По свойству медиан ΔABC гомотетичен $\Delta A_1B_1C_1$ с вершинами в серединах его сторон относительно точки G пересечения медиан: $A \to A_1, B \to B_1, C \to C_1$ при $H_G^{-1/2}$. Соответственные стороны этих треугольников параллельны. Прямые OA_1, OB_1, OC_1 содержат высоты $\Delta A_1B_1C_1$. Так как гомотетия сохраняет величину угла, то высоты AH, BH, CH ΔABC указанной гомотетией отображаются на высоты OA_1, OB_1, OC_1 $\Delta A_1B_1C_1$, $\Rightarrow$ т. H пересечения высот ΔABC переходит в т. O пересечения высот $\Delta A_1B_1C_1$. Поэтому точки H и O лежат на одной прямой с центром G гомотетии и $\overline{GO} = -\frac{1}{2}\overline{GH}, \Rightarrow \overline{GH} = 2\overline{OG}$.

Прямая, содержащая центроид G, ортоцентр H и центр O описанной около треугольника окружности, называется *прямой Эйлера треугольника*.

Задача №6.

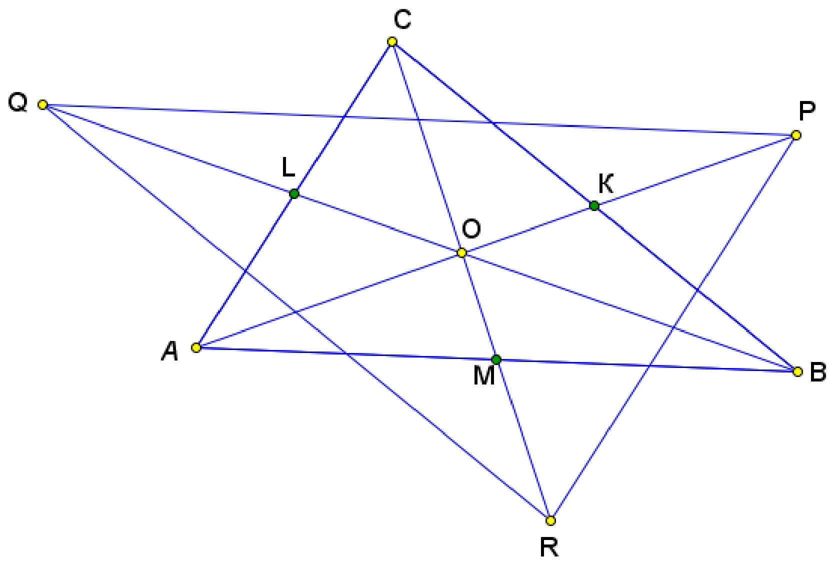
На продолжениях медиан *AK*, *BL*, *CM* треугольника *ABC* взяты точки *P*, *Q*, *R* так, что $KP = \frac{1}{2}AK, LQ = \frac{1}{2}BL, MR = \frac{1}{2}CM$. Найти площадь треугольника *PQR*, если площадь треугольника *ABC* равна 1.

Дано: ΔABC, *AK*, *BL*, *CM* – медианы,

$KP = \frac{1}{2}AK, LQ = \frac{1}{2}BL, MR = \frac{1}{2}CM$, S_{ABC}=1.

Найти: S_{PQR}.

Решение:



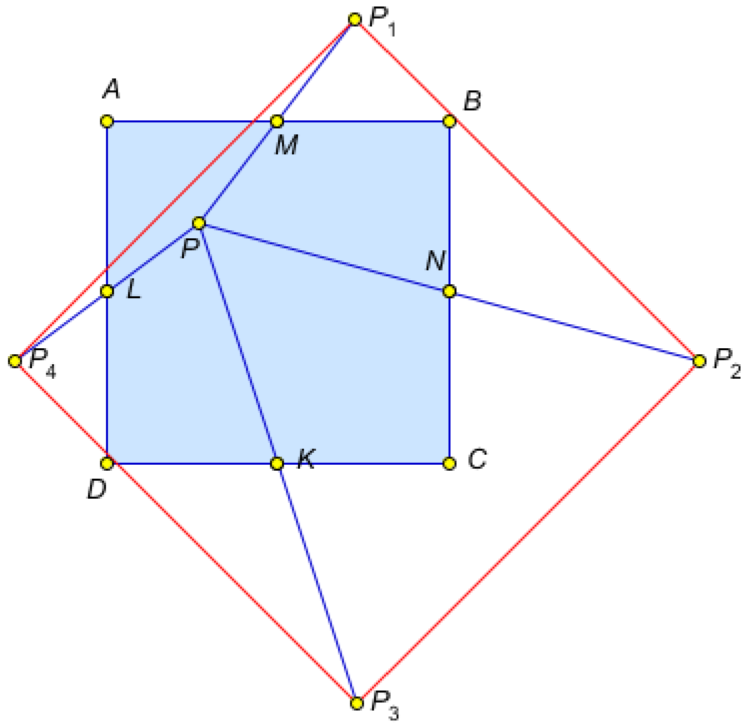
1. Медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, и $KP = \frac{1}{2}AK, LQ = \frac{1}{2}BL, MR = \frac{1}{2}CM$, $\Rightarrow$
   $\frac{OP}{AO} = \frac{OQ}{BO} = \frac{OR}{CO} = \frac{2,5}{2} = \frac{5}{4}$
2. Тогда при гомотетии H_O^k, где $k = -\frac{5}{4}$ (т.к. гомотетичные точки расположены по разные стороны от центра гомотетии), ΔABC будет гомотетичен ΔPQR , кроме того, эти треугольники будут подобны, т.к. гомотетия отображает треугольник в подобный ему треугольник. А у подобных треугольников площади относятся как квадрат коэффициента подобия: $S_{PQR} = \frac{25}{16}S_{ABC} = \frac{25}{16}$

Ответ: $\frac{25}{16}$.

Задача №7.
Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

<u>Дано</u>: *ABCD* - квадрат, *P* - произвольная точка; *M*, *N*, *K*, *L* - середины сторон квадрата *ABCD* соответственно.

<u>Доказательство:</u>
1) Построим P_1, P_2, P_3 и P_4 - точки симметричные т. *P* относительно середин *AB*, *BC*, *CD*, *DA*.



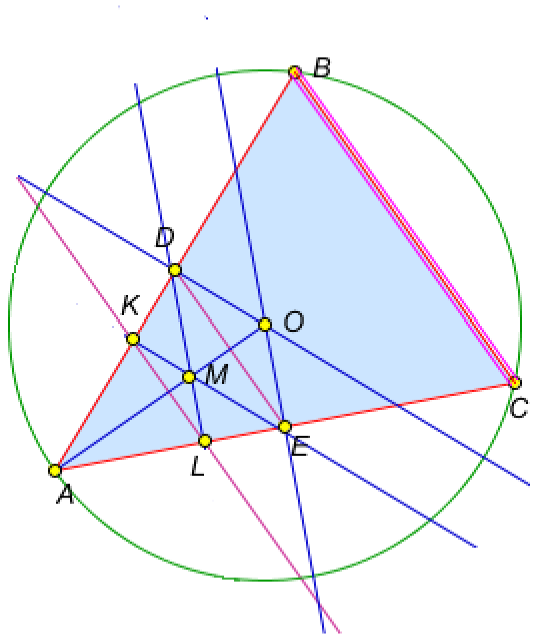
2) т. к. P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат на *PM*, *PN*, *PK*, *PL* соответственно, то P_1, P_2, P_3 и P_4
гомотетичны *M, N, K, L* относительно *P* с коэффициентом 2,
т. к. $PP_1 = 2PM$, $PP_2 = 2PN$, $PP_3 = 2PK$, $PP_4 = 2PL$
и т. к. *MNKL* - квадрат, то $P_1P_2P_3P_4$ - тоже квадрат.

Что и требовалось доказать.

Задача №8.
Точки K и L на сторонах соответственно AB и AC остроугольного треугольника ABC таковы, что $KL \| BC$; M – точка пересечения перпендикуляров, восставленных в точках K и L к отрезкам AB и AC. Докажите, что точки A, M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

Дано: ΔABC, $KL \| BC$, KM $\perp$ AB и LM $\perp$ AC
Доказать: A, M и центр описанной окружности коллинеарны.

Доказательство:
1. Дополнительное построение: описанная окружность с центром O.



2. Пусть D и E - середины сторон AB и AC соответственно, тогда
Д. п. $DE \| BC$, тогда $KL \| BC \| DE$ (DE - средняя линия ΔABC)
3. DO и EO - серединные перпендикуляры (т. к. O - точка пересечения серединных
перпендикуляров, центр описанной окружности).
$\Rightarrow DO \| KM, EO \| LM \Rightarrow KM \to DO, ML \to OE$ и $M \to O$,
что является гомотетией H_A^k,
$\Rightarrow$ точки A, M, O - лежат на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

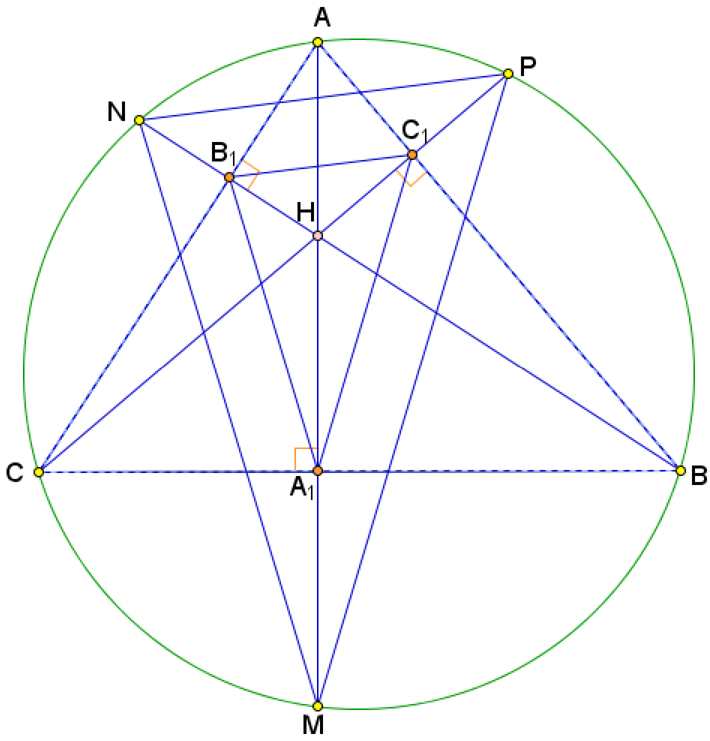
Задача №9.

AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ в 2 раза меньше радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

Дано: ΔABC, AA_1, BB_1, CC_1 – высоты.

Доказать: $R_{ABC} = 2R_{A_1B_1C_1}$.

Доказательство:



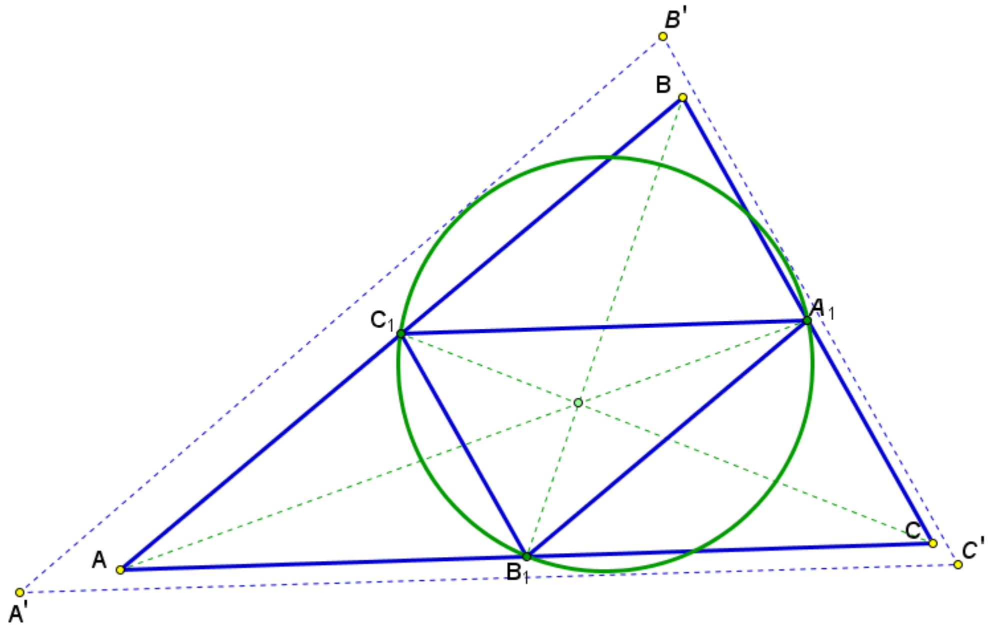
1. Пусть M, N, P – тоски пересечения высот с окружностью, описанной около ΔABC.
2. Докажем, что $HA_1 = A_1M$.
   На самом деле, $\angle C_1CB = \angle BAA_1 = 90° - \angle ABA_1$.
   Но $\angle BAA_1 = \angle MCB$ (вписанные углы, опираются на общую дугу MB).
   Тогда $\angle MCA_1 = \angle HCA_1$, и $CA_1 \perp HM$, то ΔHCM равнобедренный и $HA_1 = A_1M$. Аналогично $HB_1 = B_1N$ и $HC_1 = C_1P$.
3. Теперь ясно, что $\Delta A_1B_1C_1$ гомотетичен ΔMNP с коэффициентом гомотетии $k = 2$.

$$\Rightarrow R_{HNP} = R_{ABC} = 2R_{A_1B_1C_1}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача №10.
Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника. Докажите, что $R \geq 2r$, причём равенство достигается лишь для равностороннего треугольника.

Дано: ΔABC - равносторонний. R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности.
Доказать: $R \geq 2r$.
Доказательство:



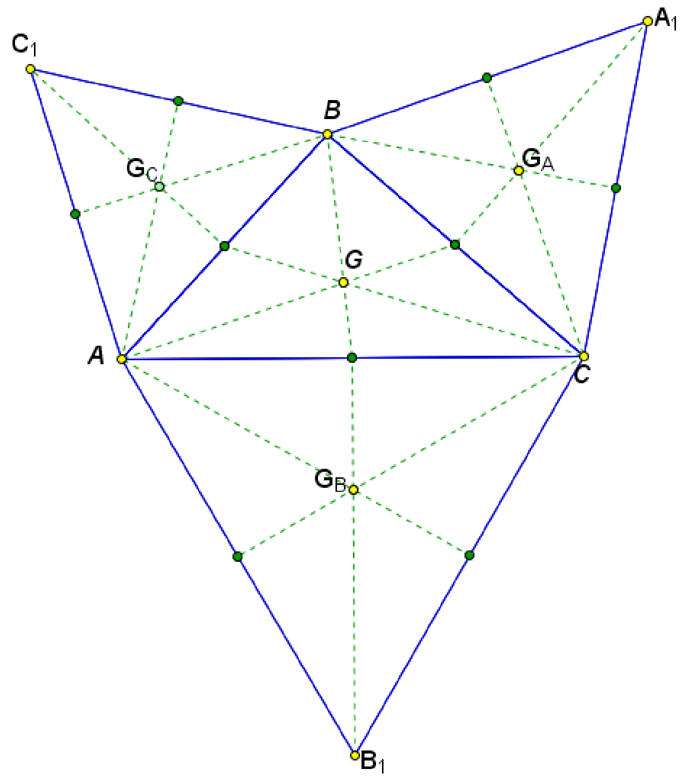
1. Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно.
2. При гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника и коэффициентом гомотетии -1/2, описанная окружность S ΔABC переходит в описанную окружность S_1 $\Delta A_1B_1C_1$.
3. Т.к. окружность S_1 пересекает все стороны ΔABC, то можно построить треугольник $A'B'C'$ со сторонами, параллельными сторонам ΔABC, для которого S_1 будет вписанной окружностью.
4. Пусть r и r' – радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$, R и R_1 – радиусы окружностей S и S_1. Ясно, что $r \leq r' = R_1 = \dfrac{R}{2}$.

   Равенство достигается, если треугольники $A'B'C'$ и ABC совпадают, т.е. $S1$ – вписанная окружность ΔABC. В этом случае AB_1=AC_1, поэтому AB=AC.
5. Аналогично AB=BC.

Что и требовалось доказать.

Задача №11.
Теорема Наполеона: На сторонах треугольника извне построены равносторонние треугольники. Доказать, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника, центр которого находится в точке пересечения медиан исходного треугольника.

<u>Доказательство:</u>



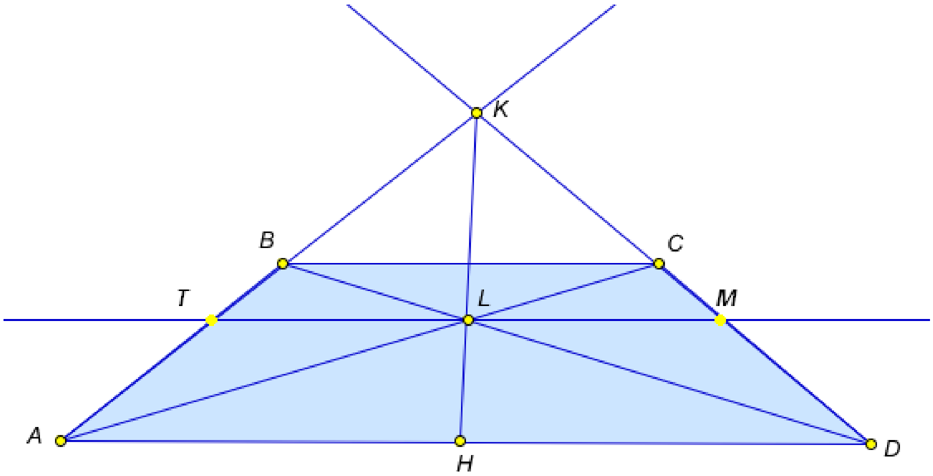
1. Пусть ABC – данный треугольник, ABC_1, AB_1C и A_1BC – равносторонние треугольники, G_A, G_B, G_C – их центры, G – точка пересечения медиан треугольника ABC.
2. При повороте вокруг точки A на угол $60°$, отрезок AC_1 переходит в AB, а отрезок AC – в AB_1. Поэтому отрезок CC_1 переходит в B_1B, а значит, $CC_1=BB_1$, и угол между этими отрезками равен $60°$. Аналогично $CC_1=AA_1$, $\Rightarrow$ $AA_1=BB_1=CC_1$. Угол между любыми двумя из этих отрезков равен $60°$.
3. При гомотетии с центром в середине стороны BC и коэффициентом 1/3 точка A переходит в G, а точка A_1 – в G_A. Поэтому прямые GG_A и AA_1 параллельны или совпадают, $GG_A = \frac{1}{3}AA_1$.
4. По аналогичной причине прямые GG_B и BB_1, GG_C и CC_1 параллельны или совпадают, и $GG_B = \frac{1}{3}BB_1$, $GG_C = \frac{1}{3}CC_1$.
5. Таким образом, отрезки GG_A, GG_B и GG_C равны и образуют между собой углы по $120°$.
   $\Rightarrow$ $\Delta G_AG_BG_C$ - равносторонний, а G – его центр.

Что и требовалось доказать.

Задача №12.
В трапеции точка пересечения диагоналей равноудалена от прямых, на которых лежат боковые стороны. Докажите, что трапеция равнобедренная.

Дано: *ABCD* – трапеция, т. пересечения диагоналей равноудалена от прямых, на которых лежат боковые стороны.
Доказать: *ABCD* – равнобедренная трапеция.

Доказательство:



1. Пусть продолжения боковых сторон *AB* и *CD* пересекаются в точке *K*, а диагонали трапеции пересекаются в точке *L*.
2. Прямая *KL* проходит через середину отрезка *AD (смотри задачу № 4)*, а по условию задачи эта же прямая делит пополам угол *AKD*.
Поэтому треугольник *AKD* равнобедренный, а значит, трапеция *ABCD* тоже равнобедренная.

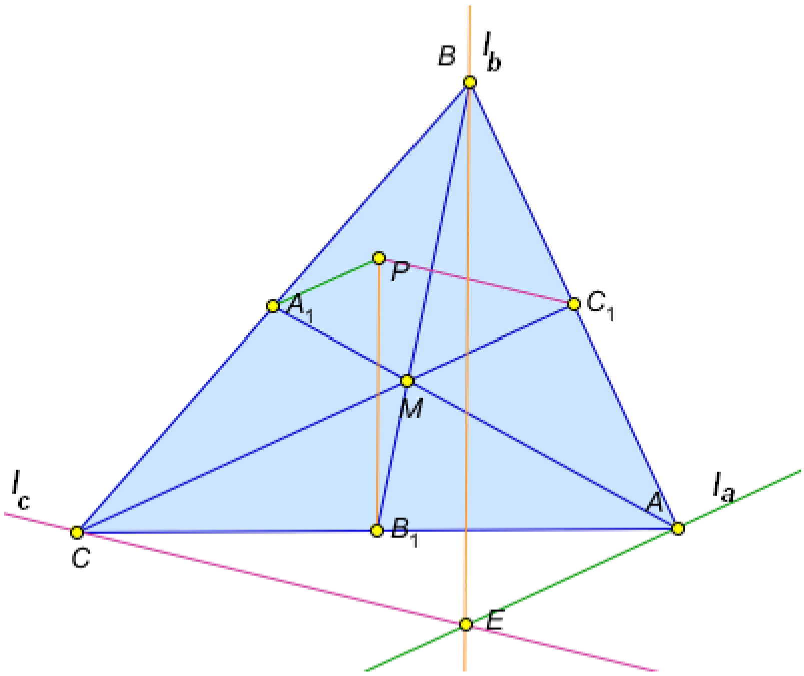
Что и требовалось доказать.

Задача №13. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M; P — произвольная точка. Прямая l_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке E.

Дано: ABC - треугольник, P - произвольная точка, AA1, BB1, CC1 - медианы, PA1 II la, PB1 II lb и PC1 II lc

Доказать: l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке E

Доказательство:



Рассмотрим гомотетию с центром M и коэффициентом -2: прямые PA_1, PB_1 и PC_1 переходят в прямые l_a, l_b и l_c => и искомая точка E является образом точки P при этой гомотетии.

Что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

«Обладая литературой более обширной, чем алгебра и арифметика вместе взятые, и, по крайней мере, столь же обширной, как анализ, геометрия в большей степени чем любой другой раздел математики, является богатейшей сокровищницей интереснейших, но полузабытых вещей, которыми спешащее поколение не имеет времени насладиться».

Е. Т. Белл.

Выводы:

1. Анализ теоретического материала по гомотетии позволил узнать свойства и область применения гомотетии, а также помогло повысить наш уровень пространственного воображения и уровень логической культуры..
2. Решение практических задач показало, что многие задачи, даже очень сложные, можно решить с помощью гомотетии, сэкономив при этом и время, и силы.
3. Мы узнали много нового и интересного, работая над данной темой. Это действительно занимательно и увлекательно. Надеемся, что эта тема пригодится нам в будущем при изучении геометрии а также поможет более глубоко подготовиться к вступительным экзаменам и успешному участию в математических конкурсах и олимпиадах. .

Список использованной литературы

Планиметрия. Пособие для углублённого изучения математики - Бутузов, Кадомцев. 2005
Элементарная геометрия. Планиметрия. - Понарин Я. П. 2004
Задачи по планиметрии. Прасолов В. В.
Задачи по геометрии, Планиметрия. - И. Ф. Шарыгин. 1982
Геометрические построения на плоскости. - Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. 1957
Учимся решать задачи по геометрии. Учебно-методическое пособие.
- Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. 1996.