

Графический способ в задачах с параметром.

Задачи с одним подвижным ГМТ.

1. Уравнение вида

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$ пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sin(\sqrt{a^2 - x^2}) = 0$$

имеет ровно восемь различных решений.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$$

имеет ровно десять различных решений.

C5.10. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$$

имеет ровно три корня.

$$|x^2 - 1| = x + a$$

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$$

имеет ровно три различных корня.

2. Уравнения вида $F(x,a)=G(x)$.

1. Найдите все значения a , при которых уравнение $|2x - a| + 1 = |x + 3|$ имеет единственное решение.

2. Найдите все значения параметра a , для которых наименьшее значение функции $y = x^2 + 2x - 1 + |x - a|$ больше 2.

3. При каких значениях a корни уравнения $|x - a^2| = -a^2 + 2a + 3$ имеют одинаковые знаки?

4. При каких значениях параметра какое количество корней имеет уравнение: $|x^2 - 1| = x + a$

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$1 = |x - 3| - |2x + a|$$

имеет ровно один корень.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$|x + 1| + 2|x + a| > 3 - 2x$$

выполняется для любого x .

C5. Найдите все такие a , что наименьшее значение функции

$$f(x) = 4|x - a| + |x^2 + 2x - 3|$$

меньше 4.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$3x + |2x + |a - x|| = 7|x + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$5x - |3x - |x + a|| = 10|x - 2|$$

имеет хотя бы один корень.

17.27 МГУ При каких значениях параметра a уравнение $2|x - 9a| - 2a^2 + 35 + x = 0$ не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30; 63]$

17.27 МГУ При каких значениях параметра a уравнение $4|x + 3a| - a^2 - 5 - 2x = 0$ имеет хотя бы одно решение? При каких значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-5; 8]$

Задачи с двумя подвижными ГМТ.

- 1) Найти все значения параметра, при которых существует ровно 3 решения уравнения: $x - a = 2|2|x| - a^2|$.
- 2) Найти все значения параметра, при которых уравнение
 - а) не имеет решений;
 - б) имеет бесконечно много решений $5|x - 3a| + |x - a^2| + 4x = a$.

Графический прием – нахождение значения функции в точке.

1. Уравнение $(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0$ имеет корень. Найти все значения параметра p , при которых число его корней равно числу корней уравнения $\frac{2x + 1}{21 - p} = \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 3}$
2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения $|x^2 - 4x| = a + 4$ и $\frac{1}{|ax|} = 8 - |x|$ имеют корни, причем число корней в каждом уравнении одинаково.

3. Найти все значения a , при которых решение неравенства $||x| - 3| < 4a|x|$ содержит не менее двух и не более четырех простых чисел.
4. Уравнение $(3p + 10)x^2 + (p + 14)x + 9 = 0$ имеет корень. Найти все значения параметра p , при которых число его корней равно числу корней уравнения $\frac{3x + 7}{32 - p} = \frac{1}{\sqrt{x + 1} + 2}$.
5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения $|x^2 + 2x| = a + 2$ и $\frac{1}{8 - |x - 1|} = ax$ имеют корни, причем число корней в каждом уравнении одинаково.
6. Найдите те значения параметра a , при которых число целых решений $||x - 2| - 2x| \leq a(x + 4)$ не менее 1 и не более 4.
7. Найти все значения параметра, при которых уравнение $\sqrt{(x^2 + 3|x| + 2)(x^2 + 7|x| + 12) + 1} = 5|x| + ax - a^2 - 6a + 3$ имеет корни как большие -2, так и меньшие -2.

8. Метод оценки:

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x + 1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 11|x + 2| + 3\sqrt{x^2 + 4x + 13} = 5a + 2|x - 2a + 2|$$

9. имеет хотя бы один корень.

Графические приемы и методы решения задач с параметром.

5. Найти все значения параметра b , при которых уравнение $\lg 2|x| + \lg(2-x) - \lg(\lg b) = 0$ имеет одно решение.
6. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{1-x^2} > a-x$ имеет решения?
7. При каких значениях a корни уравнения $|x-a^2| = -a^2 + 2a + 3$ имеют одинаковые знаки?
8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x-a = 2|2|x|-a^2|$ имеет три различных корня.
9. Решить неравенство: $\sqrt{x+a} \geq x+1$.
10. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x+a} = -\log_3(x-2a)$ в зависимости от значений a ?
11. Найти все значения a , при которых система уравнений
$$\begin{cases} x = a + \sqrt{y} \\ y^2 - x^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$
 имеет решения.
12. Найти наименьшее c , при котором система
$$\begin{cases} (x - c\sqrt{3})^2 + y^2 - 2y = 0 \\ \sqrt{3}|x| - y = 4 \end{cases}$$
 имеет одно решение.
13. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $\sqrt{1-(x+2a)^2} \geq \frac{4}{3}x$ является отрезок длины $\frac{9}{5}$?
14. Найти все значения a , при которых уравнение $|2x-a|+1 = |x+3|$ имеет единственное решение.
15. Найти все значения параметра a , для которых наименьшее значение функции $y = x^2 + 2x - 1 + |x-a|$ больше 2.
16. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + \sqrt{x^2 + 2ax + a^2} \leq 3$ является отрезок числовой прямой?

Графический прием – нахождение значения функции в точке.

10. Уравнение $(2p+3)x^2 + (p+3)x + 1 = 0$ имеет корень. Найти все значения параметра p , при которых число его корней равно числу корней уравнения $\frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.
11. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения $|x^2 - 4x| = a + 4$ и $\frac{1}{|ax|} = 8 - |x|$ имеют корни, причем число корней в каждом уравнении одинаково.
12. Найти все значения a , при которых решение неравенства $||x| - 3| < 4a|x|$ содержит не менее двух и не более четырех простых чисел.
13. Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются решениями неравенства $\log_{\frac{1-x}{3}}\left(\log_2 \frac{6+x}{3+x}\right) > 0$, а остальные не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена такой прогрессии.

Домашнее задание.

1. Уравнение $(3p+10)x^2 + (p+14)x + 9 = 0$ имеет корень. Найти все значения параметра p , при которых число его корней равно числу корней уравнения $\frac{3x+7}{32-p} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$.
2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения $|x^2 + 2x| = a + 2$ и $\frac{1}{8-|x-1|} = ax$ имеют корни, причем число корней в каждом уравнении одинаково.
3. Найдите те значения параметра a , при которых число целых решений $||x-2| - 2x| \leq a(x+4)$ не менее 1 и не более 4.
14. Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, третий и четвертый члены этой прогрессии являются

решениями неравенства $\frac{1 - \sqrt{1 - x^3}}{x + 1} \geq -x$, а остальные не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений третьего члена такой прогрессии.

Задачи с параметром (ЕГЭ-2005, 2006).

1. Найти все значения параметра p , при каждом из которых число различных корней уравнения $\frac{(7p+3)x+35p-2}{x+5} = p^2+3$ равно числу различных корней уравнения $(p+3)x^2+2x(p+9)+27=0$.
2. Найдите все значения параметра a , при которых каждое из уравнений $\frac{x^6-3x^3+x^2-2(1-a)x-11a+13}{x^3+a} = x^3-a-3$ и $2\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right) = (3+\sqrt{a-2})x-11$ имеет хотя бы одно решение, и при этом число решений одного из этих уравнений отличается от числа решений другого на неотрицательное целое число $a-2$. Решите при наименьшем из найденных a второе уравнение.
3. Даны два уравнения $\log_5(x(3p^2+1)) = (p-3)^4 - 12x$ и $2x + \frac{5}{x-1} = \frac{3x^2 - (7p+3)x + 2(p+6)}{(x-1)(p+2)}$. Значения параметра p выбирается так, что $p \neq -2$ и число различных корней первого уравнения в сумме с числом различных корней второго уравнения дает число $4-p$. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.
4. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(4+a) \cdot 3^x - (11+3a) \cdot 3^{0.5x} + 2a+7 = 0$ имеет $a^2+8a+17$ корней. Решите уравнение при этих значениях a .

5. Найдите все значения параметра a из промежутка $(2;5)$, при каждом из которых существует хотя бы одно $x \in [2;3]$, удовлетворяющее уравнению $\log_2(3 - |\sin ax|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$.
6. Найдите все значения параметра a , при которых каждое из уравнений $\frac{x^6-3x^3+x^2+2(4-a)x+a^2-13a+31}{x^3-a} = x^3+a-3$ и $2\cos\left(\frac{\pi x}{x+3}\right) = (2+\sqrt{a-3})x-19$ имеет хотя бы одно решение, и при этом число решений одного из этих уравнений отличается от числа решений другого на положительное целое число $a-3$. Решите при найденных a второе уравнение.

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left|\frac{x^2+x-2a}{x+a}-1\right| \leq 2$ не имеет решений на интервале $(1; 2)$.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 11|x+2| + 3\sqrt{x^2+4x+13} = 5a + 2|x-2a+2|$$

имеет хотя бы один корень.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x+1| + 5\sqrt{x^2+2x+5} = 2a + 3|x-4a+1|$$

имеет хотя бы один корень.

Из Горнштейна.

Упражнения

П.204. (МГУ). Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $|x^2 - 2x - 3| = a$.

П.205. (МГУ). Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x| - x^2} = a$.

П.206. Найти число решений уравнения $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$.

П.208. (МГУ). При каких a уравнение $||2x| - 1| = x - a$ имеет ровно три решения?

П.210. Для каждого значения параметра a решить неравенство $||1 - |x|| < a - x$.

П.212. (МГУ). Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x - \frac{a}{2} = 4 \sqrt{|x| - a^2}$ имеет три различных корня. Найти эти корни.

П.213. (КГУ). При каком значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x + 3|y| + 5 = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет три решения?

П.214. (КГУ). Найти наибольшее значение c , при котором система уравнений

$$\begin{cases} (x + c\sqrt{3})^2 + y^2 + 6y + 8 = 0, \\ \sqrt{3}|x| + y = 6 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

П.219. (МГТУ). Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 2x + a, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет решения.

П.221. (НГУ). При каких a уравнение $|x - a| - |2x + 2| = 3$ имеет единственное решение?

П.224. (МГУ). Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

П.225. (МГУ). Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $2 > |x + a| + x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.