В мире нет ничего постоянного, кроме непостоянства.
Джонатан Свифт

Пусть на листке написаны 9 чисел – 4 нуля и 5 единиц. Будем выполнять сле-дующую операцию: зачеркнем любые два числа и напишем вместо них 0, если они одина-ковы, и 1, если они различны. На каждом шаге количество чисел уменьшается, поэтому наступит момент, когда останется только одно число. Проделайте сами это упражнение. *(Вопрос: сколько шагов вам пришлось сделать? Изменится ли число шагов при другой последовательности зачеркивания чисел ?)* У вас осталось одно число? Это 1 ! Откуда же я заранее знаю, что у вас получилась 1, ведь операции можно выполнять в различном порядке? (Попробуйте, например, выполнить то же упражнение другим способом.)

Все дело в том, что после каждого шага сумма всех незачеркнутых чисел на листке остается нечетной (как и в начале). Проверим (в таблице приведено, как изменяется сумма двух выбранных чисел. Понятно, что сумма остальных чисел не меняется):

было	стало	изменение
00, сумма – 0	0, сумма – 0	не изменилась
01, сумма – 1	1, сумма – 1	не изменилась
10, сумма – 1	1, сумма – 1	не изменилась
11, сумма – 2	0, сумма – 0	уменьшилась на 2

Таким образом, при любой из раз-решенных операций сумма чисел либо не изменяется, либо уменьша-ется на 2, т.е. четность суммы неиз-менна. И если в начале она была нечетна (равна 5), то и в конце будет нечетна, а т.к. должно быть число 0 или 1, то это 1. Мы нашли *инвариант* – то, что не изменяется. На самом деле в этом примере есть еще один инвариант, который нам не пригодился – число шагов.

Инвариант – это величина, которая не изменяется в результате некоторых действий (например, при разрезании не изменяется суммарная площадь фигур). В качестве инварианта часто используются: четность, остаток при делении на какое-нибудь число, раскраска, произведение или сумма всех данных чисел и т.п.

В чем состоит главная идея применения инварианта? В задаче задан некий объект, над которым производятся некоторые операции. Ставится вопрос: можно ли получить с помощью этих операций другой объект с указанным свойством? Чтобы выяснить это мы строим некую величину, которая не изменяется при совершении разрешенных операций (инвариантна) и, если значения этой величины различны у двух указанных объектов, то ответ на вопрос задачи отрицательный. (*Замечание: если выбранный инвариант дает одинаковые значения для двух объектов, это еще не значит, что один можно получить из другого указанными операциями!* Но часто найденный инвариант позволяет это доказать.)

Решение следующих задач начинайте с поиска инварианта! Причем, когда вы будете рассказывать задачу, попытайтесь сначала сформулировать, какой именно инвариант вы нашли.

7.0. На шахматной доске в левом нижнем углу (поле a1) стоит слон. Сможет ли он за несколько ходов попасть на поле a8?

7.1. На чудо-дереве растет 30 апельсинов и 25 бананов. Каждый день садовник снимает с дерева ровно два фрукта. Причем, если он снимает одинаковые фрукты, то на дереве появляется новый банан, а если разные - новый апельсин. В конце концов на дереве останется один фрукт. Какой?

7.2. На доске написано 2006 чисел – 1003 единицы и 1003 нуля. За один ход разрешается стереть любые два числа и написать вместо них нуль, если они одинаковы, и 1, если они различны. Какое число останется в конце?

Упражнение. *Укажите не менее двух различных инвариантов в предыдущих задачах.*

7.3. В ряд стоят 42 шестиклассника. Можно менять любых двух, которые стоят через одного. Возможно ли переставить школьников в обратном порядке?

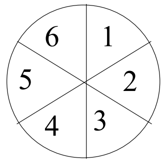
7.4. Можно ли в клетках таблицы 5х5 написать числа так, чтобы в каждой строке сумма была чётной, а в каждом столбце – нечётной?

7.5. Одним ударом силач Шварценеггер может разбить любой кусок бетона на 3 части. Сколько ударов ему понадобится сделать, чтобы разбить бетонную плиту на 2006 частей?

7.6. В тетради написаны числа от 1 до 2006. За один ход можно заменить любые два числа их разностью. Может ли в результате такой операции получить на доске единственное число – 0?

7.7. Вовочка пробрался в банк с сундуком фальшивых монет. Он взял 100 монет из своего сундука, положил их в сундук с настоящими монетами, тщательно перемешал 100 фальшивых с настоящими и забрал 100 монет из банковского сундука в свой сундук. Чего больше: настоящих монет в сундуке у математика или фальшивых монет во втором сундуке?

7.8. а) Круг разделен на 6 секторов (см.рис.), в которых по порядку написаны числа от 1 до 6. За один ход разрешается добавить по единице к двум соседним числам. Можно ли через некоторое число шагов получить во всех секторах одинаковые числа? б) Тот же вопрос, но если числа написаны не по порядку.



7.9. На столе стоит 17 стаканов, перевернутых вверх дном. Юра показывает фокус: за один раз он переворачивает по 4 стакана. Он утверждает, что таким способом сможет перевернуть все стаканы вниз дном. Не ошибается ли Юра?

7.10. У Ивана-царевича имеется два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу одним махом 33 головы, а второй – 11 голов. Но если отрубить 11 голов, то у Змея Горыныча вырастает 2006 новых голов. Может ли Иван-царевич отрубить змею все головы, если у того в самом начале 100 голов? (Замечание: рубить можно только указанное число голов. Если голов меньше 11, то ни тем, ни другим мечом их рубить нельзя.)

7.11. В каждой клетке квадратной таблицы 4х4 стоит "+" или "–". За один ход можно поменять знаки в любой строке или столбце на противоположные. Можно ли через несколько ходов получить таблицу из одних плюсов?

а)

+	–	+	–
–	+	–	+
+	–	+	–
–	+	–	+

б)

+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	–	+

в)

+	+	+	–
+	+	+	+
+	+	+	+
–	+	+	+

г)

+	+	+	–
+	+	–	+
+	–	+	+
–	+	+	+

д

–	+	+	–
+	–	–	+
+	–	+	–
–	+	–	+

Дополнительные задачи.

7.12. На шести елках сидят шесть сорок – по одной на каждой елке. Елки растут с интервалом в 1метр. Если какая-то сорока перелетает с одной елки на другую, то какая-нибудь другая сорока обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все сороки собраться на одной елке ?

7.13. Два шестиклассника гоняют три шара по бильярдному столу. За каждый ход разрешается ударить по любому из шаров так, чтобы он прошёл между двумя другими и остановился затем в некоторой точке. Выигрывает тот, после чьего хода шары вернутся на свои исходные места. Может ли первый выиграть (считается, что стол настолько большой, что ни до лузы, ни до стенки ни один шарик докатиться не может)?

7.14. В стране Серобуромалинии живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Дополнительные задачи.

7.12. На шести елках сидят шесть сорок – по одной на каждой елке. Елки растут с интервалом в 1метр. Если какая-то сорока перелетает с одной елки на другую, то какая-нибудь другая сорока обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все сороки собраться на одной елке?

7.13. Два шестиклассника гоняют три шара по бильярдному столу. За каждый ход разрешается ударить по любому из шаров так, чтобы он прошёл между двумя другими и остановился затем в некоторой точке. Выигрывает тот, после чьего хода шары вернутся на свои исходные места. Может ли первый выиграть (считается, что стол настолько большой, что ни до лузы, ни до стенки ни один шарик докатиться не может)?

7.14. В стране Серобуромалинии живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Дополнительные задачи.

7.12. На шести елках сидят шесть сорок – по одной на каждой елке. Елки растут с интервалом в 1метр. Если какая-то сорока перелетает с одной елки на другую, то какая-нибудь другая сорока обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все сороки собраться на одной елке ?

7.13. Два шестиклассника гоняют три шара по бильярдному столу. За каждый ход разрешается ударить по любому из шаров так, чтобы он прошёл между двумя другими и остановился затем в некоторой точке. Выигрывает тот, после чьего хода шары вернутся на свои исходные места. Может ли первый выиграть (считается, что стол настолько большой, что ни до лузы, ни до стенки ни один шарик докатиться не может)?

7.14. В стране Серобуромалинии живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Дополнительные задачи.

7.12. На шести елках сидят шесть сорок – по одной на каждой елке. Елки растут с интервалом в 1метр. Если какая-то сорока перелетает с одной елки на другую, то какая-нибудь другая сорока обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все сороки собраться на одной елке ?

7.13. Два шестиклассника гоняют три шара по бильярдному столу. За каждый ход разрешается ударить по любому из шаров так, чтобы он прошёл между двумя другими и остановился затем в некоторой точке. Выигрывает тот, после чьего хода шары вернутся на свои исходные места. Может ли первый выиграть (считается, что стол настолько большой, что ни до лузы, ни до стенки ни один шарик докатиться не может)?

7.14. В стране Серобуромалинии живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Дополнительные задачи.

7.12. На шести елках сидят шесть сорок – по одной на каждой елке. Елки растут с интервалом в 1метр. Если какая-то сорока перелетает с одной елки на другую, то какая-нибудь другая сорока обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все сороки собраться на одной елке ?

7.13. Два шестиклассника гоняют три шара по бильярдному столу. За каждый ход разрешается ударить по любому из шаров так, чтобы он прошёл между двумя другими и остановился затем в некоторой точке. Выигрывает тот, после чьего хода шары вернутся на свои исходные места. Может ли первый выиграть (считается, что стол настолько большой, что ни до лузы, ни до стенки ни один шарик докатиться не может)?

7.14. В стране Серобуромалинии живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Дополнительные задачи.

7.12. На шести елках сидят шесть сорок – по одной на каждой елке. Елки растут с интервалом в 1метр. Если какая-то сорока перелетает с одной елки на другую, то какая-нибудь другая сорока обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все сороки собраться на одной елке ?

7.13. Два шестиклассника гоняют три шара по бильярдному столу. За каждый ход разрешается ударить по любому из шаров так, чтобы он прошёл между двумя другими и остановился затем в некоторой точке. Выигрывает тот, после чьего хода шары вернутся на свои исходные места. Может ли первый выиграть (считается, что стол настолько большой, что ни до лузы, ни до стенки ни один шарик докатиться не может)?

7.14. В стране Серобуромалинии живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Задачи на дом.

7.15. По кругу написаны числа от 1 до 2006. За один ход разрешается прибавлять к двум соседним числам по 17. Можно ли за некоторое количество ходов добиться равенства всех чисел?

7.16. Баба Яга и Кощей Бессмертный в избушке на курьих ножках били комаров. Яга била комаров метлой – каждый раз по 27 штук. А Кощей предпочитал бить комаров дверью, хлопая ею, убивая каждый раз по 101 комару. Но всякий раз, когда он хлопал, то в дверь ухитрялись пролететь еще 2006 новых комаров. Смогут ли Яга и Кощей через некоторое время избавиться от комаров, если первоначально в избушке было 1000 комаров?

7.17. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 26 монет?

Задачи на дом.

7.15. По кругу написаны числа от 1 до 2006. За один ход разрешается прибавлять к двум соседним числам по 17. Можно ли за некоторое количество ходов добиться равенства всех чисел?

7.16. Баба Яга и Кощей Бессмертный в избушке на курьих ножках били комаров. Яга била комаров метлой – каждый раз по 27 штук. А Кощей предпочитал бить комаров дверью, хлопая ею, убивая каждый раз по 101 комару. Но всякий раз, когда он хлопал, то в дверь ухитрялись пролететь еще 2006 новых комаров. Смогут ли Яга и Кощей через некоторое время избавиться от комаров, если первоначально в избушке было 1000 комаров?

7.17. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 26 монет?

Задачи на дом.

7.15. По кругу написаны числа от 1 до 2006. За один ход разрешается прибавлять к двум соседним числам по 17. Можно ли за некоторое количество ходов добиться равенства всех чисел?

7.16. Баба Яга и Кощей Бессмертный в избушке на курьих ножках били комаров. Яга била комаров метлой – каждый раз по 27 штук. А Кощей предпочитал бить комаров дверью, хлопая ею, убивая каждый раз по 101 комару. Но всякий раз, когда он хлопал, то в дверь ухитрялись пролететь еще 2006 новых комаров. Смогут ли Яга и Кощей через некоторое время избавиться от комаров, если первоначально в избушке было 1000 комаров?

7.17. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 26 монет?

Задачи на дом.

7.15. По кругу написаны числа от 1 до 2006. За один ход разрешается прибавлять к двум соседним числам по 17. Можно ли за некоторое количество ходов добиться равенства всех чисел?

7.16. Баба Яга и Кощей Бессмертный в избушке на курьих ножках били комаров. Яга била комаров метлой – каждый раз по 27 штук. А Кощей предпочитал бить комаров дверью, хлопая ею, убивая каждый раз по 101 комару. Но всякий раз, когда он хлопал, то в дверь ухитрялись пролететь еще 2006 новых комаров. Смогут ли Яга и Кощей через некоторое время избавиться от комаров, если первоначально в избушке было 1000 комаров?

7.17. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 26 монет?

Задачи на дом.

7.15. По кругу написаны числа от 1 до 2006. За один ход разрешается прибавлять к двум соседним числам по 17. Можно ли за некоторое количество ходов добиться равенства всех чисел?

7.16. Баба Яга и Кощей Бессмертный в избушке на курьих ножках били комаров. Яга била комаров метлой – каждый раз по 27 штук. А Кощей предпочитал бить комаров дверью, хлопая ею, убивая каждый раз по 101 комару. Но всякий раз, когда он хлопал, то в дверь ухитрялись пролететь еще 2006 новых комаров. Смогут ли Яга и Кощей через некоторое время избавиться от комаров, если первоначально в избушке было 1000 комаров?

7.17. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 26 монет?

Задачи на дом.

7.15. По кругу написаны числа от 1 до 2006. За один ход разрешается прибавлять к двум соседним числам по 17. Можно ли за некоторое количество ходов добиться равенства всех чисел?

7.16. Баба Яга и Кощей Бессмертный в избушке на курьих ножках били комаров. Яга била комаров метлой – каждый раз по 27 штук. А Кощей предпочитал бить комаров дверью, хлопая ею, убивая каждый раз по 101 комару. Но всякий раз, когда он хлопал, то в дверь ухитрялись пролететь еще 2006 новых комаров. Смогут ли Яга и Кощей через некоторое время избавиться от комаров, если первоначально в избушке было 1000 комаров?

7.17. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 26 монет?

6 класс *Инварианты.* *Листок 7.*

В мире нет ничего постоянного, кроме непостоянства.
Джонатан Свифт

Вся необходимая теория есть на листочках для учеников. При проверке задачи необходимо просить указать инвариант.
Задачи, обязательные для разбора: 1 (или 2) - они однотипны, 3,7,8,10.

Ответы и инварианты. (листок 7)

7.0. *Ответ*: нельзя. *Инвариант*: сохранение цвета клетки.
7.1. *Ответ*: банан. *Инвариант*: четность количества апельсинов.
7.2. *Ответ*: 1. *Инвариант*: нечетность количества единиц.
7.3. *Ответ*: нельзя. *Инвариант*: сохранение четности места школьника при перестановке. Поэтому 1 и 42 поменять не удастся.
7.4. *Ответ*: нельзя. *Задача не на Инвариант!*: сосчитать сумму всех чисел таблицы двумя способами – по строкам и по столбцам.
7.5. *Ответ*: нельзя. *Инвариант*: нечетность общего количества кусков.
7.6. *Ответ*: нельзя. *Инвариант*: сохранение суммы. Задача полностью аналогична задаче про расстановку «+» и «–» среди чисел от 1 до 2006.
7.7. *Ответ*: одинаково. *Инвариант*: количество добавленных и взятых монет.
7.8. а) *Ответ*: нельзя. *Инвариант*: сохранение нечетности суммы всех чисел (изначально 21)
б) *Ответ*: нельзя. *Инвариант*: тот же самый.
7.9. *Ответ*: нельзя. *Инвариант*: четность количества перевернутых вверх дном стаканов.
7.10. *Ответ*: нельзя. *Инвариант*: остаток отделения количества голов на 3.
7.11. *Ответ*: а) можно; б) нельзя *Инвариант*: четность количества минусов; в)г)д) нельзя *Инвариант*: четность количества минусов в любом квадратике 2x2.

Дополнительные задачи.

7.12. *Ответ*: нельзя. *Инвариант*: сумма «координат».
7.13. *Ответ*: не может. *Инвариант*: порядок шаров по кругу.
7.14. *Ответ*: не может. *Инвариант*: изменение остатков при делении на 3.

Задачи на дом.

7.15. *Ответ*: нет. *Инвариант*: чётность суммы.
7.16. *Ответ*: нет. *Инвариант*: остаток при делении на 3.
7.17. *Ответ*: нельзя. *Инвариант*: чётность количества монет.

Замечания. Имеет смысл в качестве первой подсказки не давать ученикам полностью решение, а указать инвариант с целью, чтобы все остальное они додумали сами.

Решения.

7.0. Заметим, что слон в силу шахматных правил ходит только по полям одного цвета. Поля же a1 и a8 имеют разный цвет.

7.1. Рассмотрим, как изменяется количество фруктов за один день:

было	стало	изменение количества фруктов
1б 1а	0б 1а	бананов –1; апельсинов не изменилось
2б 0а	1б 0а	бананов –1; апельсинов не изменилось
0б 2а	1б 0а	бананов +1; апельсинов –2

Мы видим, что количество апельсинов или остается прежним или уменьшается на 2. Это значит, что четность количества апельсинов не меняется. И если первоначально апельсинов 30, то на любом шаге их четное количество. Значит, поскольку в конце останется один фрукт, это не может быть апельсин. Поэтому останется банан.

7.2. Задача полностью аналогична предыдущей.

было	стало	изменение количества цифр
1 1	0	единиц –2; нулей +1
0 0	0	единиц не изменилось; нулей – 1
0 1	1	единиц не изменилось; нулей –1

На этот раз единицы выступают в качестве апельсинов и их количество или остается прежним или уменьшается на 2. Но первоначально единиц 1003, то есть нечетно. Следовательно, в конце останется 1, так как их не может не остаться совсем.

7.3. Занумеруем все места, на которых стоят школьники. Тогда операция состоит в том, что мы меняем местами двух шестиклассников стоящих на местах с одинаковой четностью. Но места 1 и 42 разной четности. Следовательно, добиться требуемого не удастся, так как не получится школьника, стоящего на первом месте перемесить на место 42.

7.4. Предположим, что это возможно. Сосчитаем сумму чисел в таблице двумя способами. Если считать эту сумму как сумму по строкам, то получится четное число (сумма четных чисел), если же считать по столбцам, то сумма будет нечетной как сумма пяти нечетных чисел. Но это одно и тоже число! Получили противоречие. Следовательно, такое невозможно.

7.5. Заметим, что после каждого удара количество кусков увеличивается на 2 (–1 кусок + 3 куска = +2 куска). Следовательно, из одного первоначального куска таким способом можно получить только нечетное число кусков, а 2006 четное. Поэтому Шварценеггер не сможет разбить бетонную плиту на 2006 частей.

7.6. Решение 1. Пусть числа записаны в строчку и перед каждым из них стоит знак «+». Что значит, что мы заменяем два числа их разностью? Это значит, что перед каким-то из чисел мы меняем знак «+» на «–». Посмотрим, как тогда изменяется сумма записанных в тетради чисел. Если знак «–» поставлен перед числом a, то сумма уменьшилась на $2a$. Следовательно, если исходная сумма была четной, то она четной и останется, если же была нечетной, то останется нечетной. И так на любом ходе. Первоначально сумма всех чисел от 1 до 2006 нечетна (1003 нечетных числа), следовательно, на каждом шаге получается также нечетная сумма, поэтому получить 0 не удастся.

Решение 2. Посмотрим, как изменяется количество четных и нечетных чисел на каждом шаге.

два числа	разность	изменение количества чисел
Ч Ч	Ч	четных –1; нечетных не изменилось
Ч Н	Н	четных –1; нечетных не изменилось
Н Н	Ч	четных +1; нечетных –2

Мы видим, что количество нечетных чисел или остается прежним или уменьшается на 2. Следовательно, четность их количества не изменяется. Первоначально их было 1003. Поэтому когда останется одно число, оно обязательно будет нечетным. Значит, получить 0 такими операциями невозможно.

7.7. Решение 1. Поскольку Вовочка взял столько же монет, сколько и положил, то количество монет в сундуке и в банке не изменилось. Рассмотрим, сколько настоящих монет он забрал себе. Эти монеты заменили в его сотне монет фальшивые, следовательно, эти фальшивые монеты должны остаться в банке. Поэтому количество настоящих монет в сундуке у Вовочки и количество фальшивых монет во втором сундуке в банке одинаково.

Решение 2. Пусть у Вовочки оказалось k настоящих монет. Заметим, что ничего не изменится, если он будет менять эти k монет по одной. То есть будет класть одну фальшивую монету в банк и взамен забирать себе одну настоящую. Тогда, чтобы получить k настоящих монет, он должен положить в банк k фальшивых. Поэтому монет одинаково.

7.8. Заметим, что при добавлении 1 к двум соседним секторам общая сумма чисел увеличивается на 2. Это значит, что четность этой суммы не меняется. Предположим, что нам удалось сделать равными числа во всех секторах. Тогда общая сумма имеет вид 6k, то есть четна. Первоначальная сумма равна 1+2+3+4+5+6 = 21 – нечетна. Следовательно, указанными операциями добиться требуемого невозможно.

7.9. Рассмотрим, как изменяется количество перевернутых стаканов за один раз:

было	стало	изменение количества стаканов
∩ ∩ ∩ ∩	∪ ∪ ∪ ∪	вверх дном –4; вниз дном +4
∩ ∩ ∩ ∪	∪ ∪ ∪ ∩	вверх дном –2; вниз дном +2
∩ ∩ ∪ ∪	∪ ∪ ∩ ∩	вверх дном не изм.; вниз дном не изм.
∩ ∪ ∪ ∪	∪ ∩ ∩ ∩	вверх дном +2; вниз дном –2
∪ ∪ ∪ ∪	∩ ∩ ∩ ∩	вверх дном +4; вниз дном –4

Мы видим, что количество стаканов как вверх дном, так и вниз дном изменяется на четное число. Это значит, что четность не меняется. В частности не меняется четность перевернутых вверх дном стаканов. А первоначально их было 17 – нечетно, следовательно, на любом шаге их будет нечетно, а 0 – четное число. Поэтому Юра ошибается.

7.10. Посмотрим, как изменяется количество голов после каждого взмаха меча. После первого меча: –33, после второго –11+2006 = 1995. Заметим, что и 33 и 1995 делится на 3. Это значит, что после любого из мечей остаток от деления на 3 количества голов останется без изменения. Теперь предположим, что Ивану-царевичу удастся отрубить все головы, это значит, что в некоторый момент времени остаток от деления количества голов на 3 будет равен нулю (так как 0 делится на 3). Но первоначально голов 100 – остаток от деления на 3 равен 1. Следовательно, в процессе махания мечами остаток после каждого взмаха будет по-прежнему равен 1 и нулем стать не сможет. Поэтому Иван-царевич не сможет отрубить змею все головы.

7.11. а) можно. Например, меняем знаки в первом и третьем столбце, а потом в первой и третьей строке.

б) Рассмотрим, как изменяется количество плюсов и минусов за одну операцию:

было	стало	изменение количества стаканов
+ + + +	– – – –	плюсов –4; минусов +4
+ + + –	– – – +	плюсов –2; минусов +2
+ + – –	– – + +	плюсов не изм.; минусов не изм.
+ – – –	– + + +	плюсов +2; минусов –2
– – – –	+ + + +	плюсов +4; минусов –4

Мы видим, что количество плюсов и минусов каждый раз изменяется на четное число. Это значит, что четность не меняется. В частности не меняется четность общего количества минусов. Первоначально минус один. – нечетное число. Поэтому получить ноль минусов не удастся.

в)г)д) заметим, что если рассмотреть произвольный квадратик 2x2, то для него справедлив тот же инвариант, что и для большого квадрата, а именно сохранение четности (или нечетности) количества минусов. Так как любая операция с большим квадратом либо не затрагивает маленький квадратик вообще, либо соответствует аналогичной операции в маленьком квадратике. Тогда, если предположить, что некоторой последовательностью разрешенных операций можно привести исходную таблицу к таблице из одних плюсов, то аналогичными операциями приведется к одним плюсам и маленький квадратик. Но это невозможно в силу инварианта. Поэтому для большого квадрата это также невозможно.

Дополнительные задачи.

7.12. Занумеруем елки числами от 1 до 6. Будем присваивать каждой сороке номер той елки, на которой она в данный момент сидит. В частности, если на одной елке сидит две сороки, то они обе получают одинаковый номер. Посмотрим, как изменяется общая сумма номеров сорок после перелета. У одной из сорок номер увеличивается на k: N+k, а у другой уменьшается на то же k: M–k. Все остальные номера без изменений. Поэтому общая сумма осталась без изменений. Следовательно, в любой момент времени сумма всех номеров сорок будет равна первоначальной сумме, а она равна 21=1+2+3+4+5+6. Но если все сороки соберутся на одной елке, то сумма их номеров должна быть кратна 6 (сумма шести одинаковых чисел). А 21 на 6 не делится. Противоречие. Значит, все сороки собраться на одной елке не смогут.

7.13. Занумеруем имеющиеся шары. Пусть первоначально они расположены на столе в порядке 1-2-3 (по часовой стрелке). Тогда после каждого удара меняется порядок шаров или «ориентация». Например, если удар пришелся по шару 3, то получится порядок 1-3-2, если по шару 1, то 2-1-3, что то же самое, что 1-3-2, если считать с первого шара. Тем самым после каждого четного удара ориентация снова становится 1-2-3 по часовой стрелке, а после каждого нечетного 1-2-3 против часовой стрелки. Если шары вернулись на свои места, это значит, что ориентация стала первоначальной. Следовательно, это может произойти только после какого-нибудь четного удара, а поскольку первый игрок все время делает нечетные удары, то выиграть ему не удастся.

7.14. Рассмотрим, как изменяется количество хамелеонов в результате встречи:

было			стало			изменение остатка от деления на 3 хамелеонов		
сер	бур	мал	сер	бур	мал	серые	бурые	малиновые
1	1	0	0	0	2	–1	–1	–1
0	1	1	2	0	0	–1	–1	–1
1	0	1	0	2	0	–1	–1	–1

Мы видим, что остатки от деления на 3 изменяются одинаково (+2 – это то же самое, что –1) независимо от вида встречи. Посмотрим, какие остатки первоначально: серые – остаток 1, бурые – остаток 0, малиновые – остаток 2. Поскольку остатки каждый раз изменяются на одно и то же число, то они как были разными, то разными и останутся. Всего хамелеонов 45. Если все хамелеоны будут одного цвета, то остатки все будут равны нулю, но поскольку сделать все остатки одинаковыми не получится, а, значит, не получится сделать хамелеонов одного цвета.

Задачи на дом.

7.15. Задача полностью аналогична задаче 7.8.

Решение. Заметим, что при добавлении 1 к двум соседним секторам общая сумма чисел увеличивается на 34. Это значит, что четность этой суммы не меняется. Предположим, что нам удалось сделать равными числа во всех секторах. Тогда общая сумма имеет вид 2006k, то есть четна. Первоначальная сумма равна 1+2+…+2006 – нечетна. Следовательно, указанными операциями добиться требуемого невозможно.

7.16. Задача полностью аналогична задаче 7.10. Посмотрим, как изменяется количество комаров после каждого действия. После удара Бабы-Яги количество комаров уменьшается на 27, а после удара Кощея –101+2006=1905. И 27, и 1905 делится на 3. Это значит, что после любого из ударов остаток от деления на 3 количества комаров останется без изменения. Теперь предположим, что им удастся убить всех комаров, это значит, что в некоторый момент времени остаток от деления количества комаров на 3 будет равен нулю. Но первоначально комаров 1000 – остаток от деления на 3 равен 1. Следовательно, после каждого удара он будет по-прежнему равен 1 и нулем стать не сможет. Поэтому Яга и Кощей не смогут избавиться от комаров.

7.17. Заметим, что в результате одного размена количество монет увеличивается на 4 (–1+5=4). Соответственно общее количество монет на любом шаге имеет вид 4k+1. Легко видеть, что 26 представить в таком виде нельзя. (Замечание: совсем не обязательно приводить количество монет к виду 4k+1, достаточно заметить, что на любом шаге оно нечетно.)