Министерство народного образования и науки Удмуртской Республики
Муниципального образовательного учреждения
«Средней общеобразовательной школы №32».

Исследовательская работа

«Помогает параллельное проектирование».

Выполнила: ученица 9 класса «М»
МОУ СОШ №32
Киселёва Яна
Дмитревна

Учитель: Стаханова Полина
Александровна

«Ижевск 2010»

Содержание:

Цель: исследование параллельного проектирования и его свойств, а также применение параллельного проектирования при решении задач.

Методы исследования:

1. Изучение теории по параллельному проектированию

2. Доказательство некоторых свойств параллельного проектирования

3. Установление связи между параллельным проектированием и решением задач

4. Выполнение практической части.

Вступление.

Геометрия ..., наравне со многими другими разделами математики, дает возможность почувствовать красоту математики вообще и может стать для кого-то началом пути в «большую науку». Кроме того, каждый любитель геометрии ... имеет шанс открыть нечто новое и пополнить ее сокровищницу собственной драгоценной находкой, ибо геометрия поистине неисчерпаема!

А. *Г. Мякишев «Элементы геометрии треугольника»*

Геометрия многолика. И одну задачу можно решить большим количеством разных способов. В школе изучается лишь малая часть того, что принято называть геометрией. Моя работа называется «Помогает параллельное проектирование». Работа показывает, что параллельное проектирование позволяет не только строить проекции фигур и пространственных тел, но еще и облегчает решение ряда задач, связанных с нахождением отношений отрезков и нахождения отношения площадей.

В этой работе рассмотрен удивительный способ для решения ряда задач. Способ, не описанный в школьном учебнике. Способ, основанный на свойствах параллельного проектирования таких как : любой треугольник при помощи параллельного проектирования можно перевести в правильный; при параллельном проектировании сохраняются отношения отрезков и площадей фигур.

Работа состоит из двух частей. В первой части работы рассказывается, что же такое параллельное проектирование, формулируются и доказываются некоторые его свойства. Во второй – практической части рассмотрен ряд задач, которые можно решать с помощью параллельного проектирования.

К сожалению, параллельное проектирование очень редко используется. Оно не упоминается в школьной программе до десятого класса, хотя оно могло бы существенно упростить решение некоторых задач по геометрии. К тому же я считаю эту тему очень интересной и стоящей, ведь мы встречаемся с параллельным проектированием каждый день.

Теоретическая часть.
Что такое параллельное проектирование..

Ветреный летний день.
Прижавшиеся к стене
Дерево и его тень.
И тень интересней мне.
Иосиф Бродский. «Сидя в тени»

Пусть – π некоторая плоскость, l – пересекающая ее прямая (рис. 1). Через произвольную точку A, не принадлежащую прямой l, проведем прямую, параллельную прямой l. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется параллельной проекцией точки A на плоскость π в направлении прямой l. Обозначим ее A'. Если точка A принадлежит прямой l, то параллельной проекцией A на плоскость π считается точка пересечения прямой l с плоскостью π.

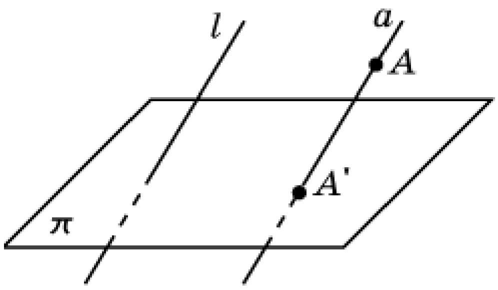


Рис. 1

Таким образом, каждой точке A пространства сопоставляется ее проекция A' на плоскость π. Это соответствие называется параллельным проектированием на плоскость π в направлении прямой l.

Определение: Пусть Φ - некоторая фигура в пространстве. Проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется параллельной проекцией фигуры Φ на плоскость π в направлении прямой l. Говорят также, что фигура Φ' получена из фигуры Φ параллельным проектированием.

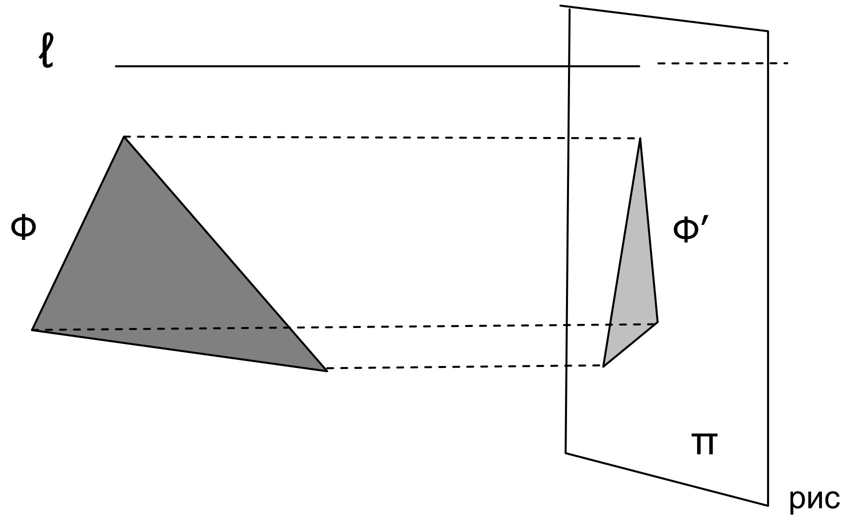


рис. 2

Мы не раз встречались с параллельным проектированием в жизни. Например, наша тень в солнечный день на ровном асфальте есть наша параллельная проекция (солнечные лучи приближенно можно считать параллельными ввиду большой удалённости Солнца от Земли).

Рис. 3

Параллельное проектирование позволяет получать наглядные изображения пространственных (трёхмерных) фигур на (двумерной) плоскости (рис. 4). Дело в том, что параллельное проектирование сохраняет ряд важных черт изображаемой фигуры. Перечислим основные свойства параллельного проектирования в предложении, что направление проектирования не параллельно рассматриваемым прямым и отрезкам (в противном случае их проекциями являются точки.

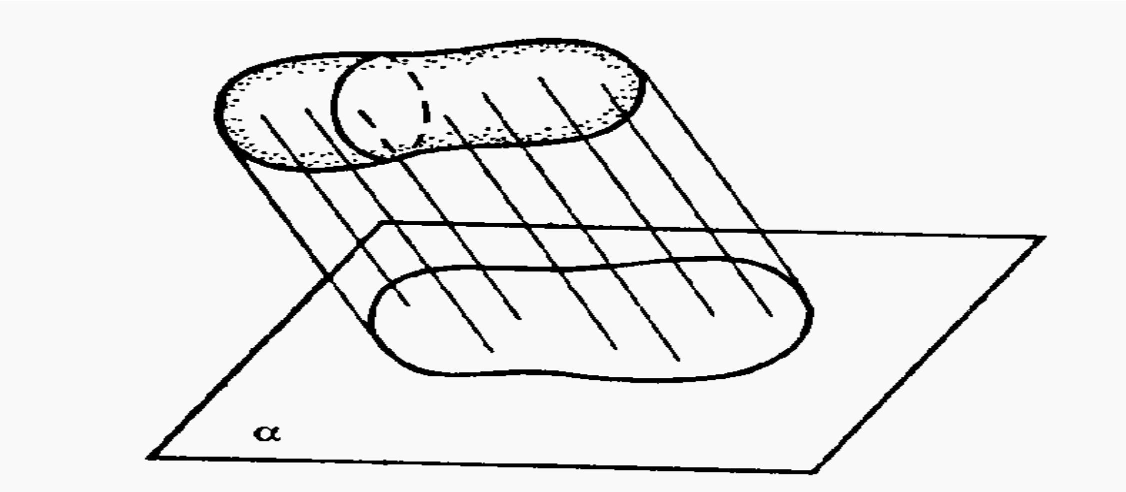


Рис. 4.

Свойства параллельного проектирования.

Свойство 1. Проекция прямой есть прямая, проекция отрезка – отрезок. (рис. 5)

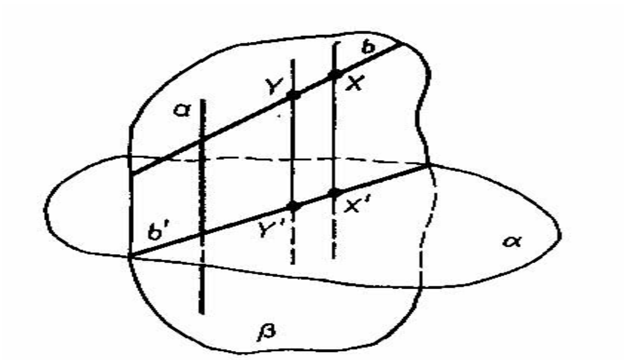


Рис. 5

Свойство 2. Две параллельные прямые проектируются либо в две параллельные прямые, либо в одну и ту же прямую. Проекции параллельных отрезков лежат либо на параллельных прямых, либо на одной прямой. (рис. 6, 7)

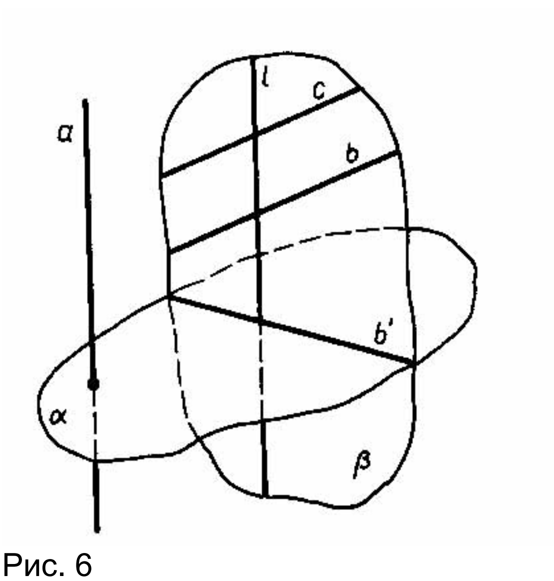


Рис. 6

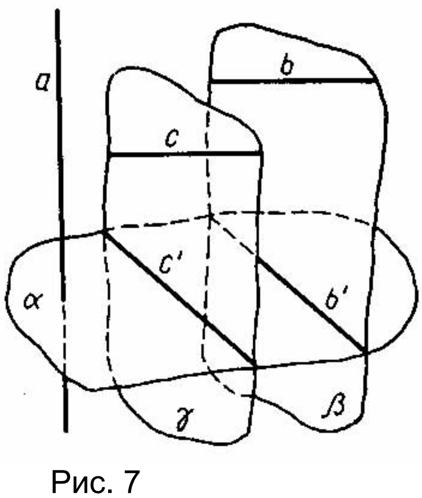


Рис. 7

Свойство 3. Длины проекций параллельных отрезков или отрезков лежащих на одной прямой, пропорциональны длинам этих отрезков. (рис. 8, 9)

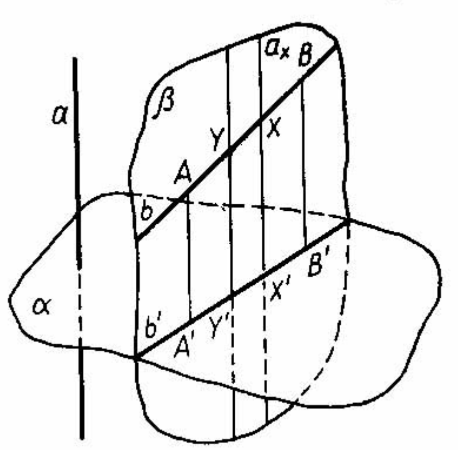


Рис. 8

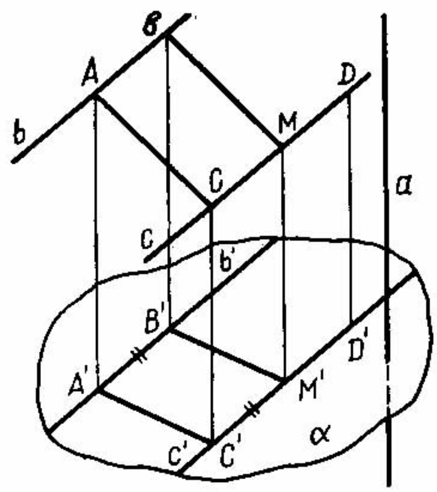


Рис. 9

Доказательство свойства №3. Пусть AB и CD – отрезки не параллельные направлению проектирования l ; A\`, B\`, C\`, D\` - проекции точек A, B, C, D соответственно на плоскость a в направлении l . Если A\` B\` и C\` D\` - один и тот же отрезок, то AB = CD и доказываемое утверждение очевидно. Пусть A\` B\` и C\`D\` различны. Рассмотрим сначала случай, когда проектируемые отрезки лежат на одной прямой (рис. 10). Тогда их проекции лежат на линии пересечения плоскости a и плоскости, проходящей через прямую AB параллельно направлению проектирования l. Применяя известную теорему о пропорциональных отрезках, получим, что AB :CD = A\` B\` : C\` D\`.

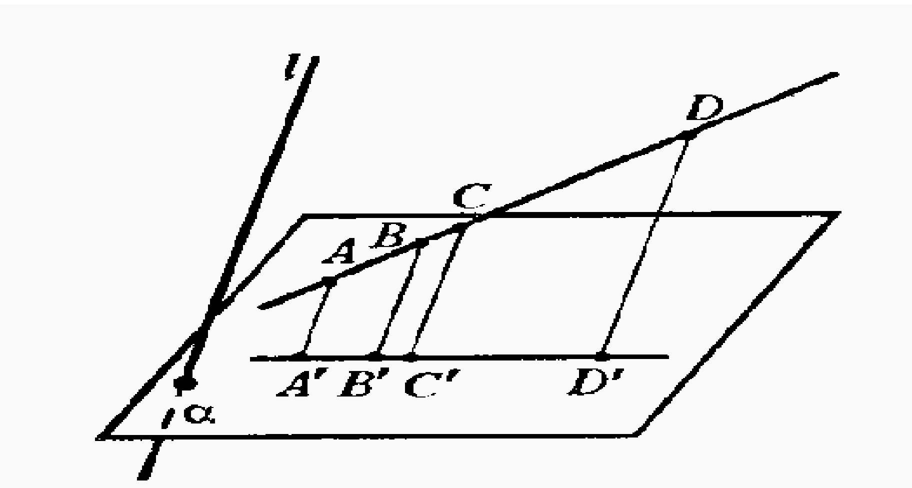


Рис. 10

Теперь рассмотрим случай, когда отрезки AB и CD параллельны, а их проекции различны (рис. 11). Возьмём на продолжении отрезка CD за точку C точку E такую, что CE = AB. Так как (CE) ll (AB), но четырёхугольник ABEC – параллелограмм в плоскости, проходящей через прямые AB и CD (по признаку параллелограмма), следовательно, (AC) ll (BE). Пусть E\` - проекция точки E на плоскость $a$ в направлении $l$. По свойству №2 (A\` C\`) ll (B\` E\`) и (A\` B\`) ll (C\` E\`) ( так как (AC) ll (BE) и (AB) ll (CE)), но (A\`B\`) ll (C\`D\`), значит, E\` принадлежит (C\`D\`) и, так как A\`B\`E\`C\` - параллелограмм, A\`B\` = C\`E\`. Итак равенство AB : CD = A\`B\` : C\`D\` равносильно равенству CE : ED = A\`B\` : C\`D\`, тем самым мы свели рассматриваемый случай к разработанному выше.

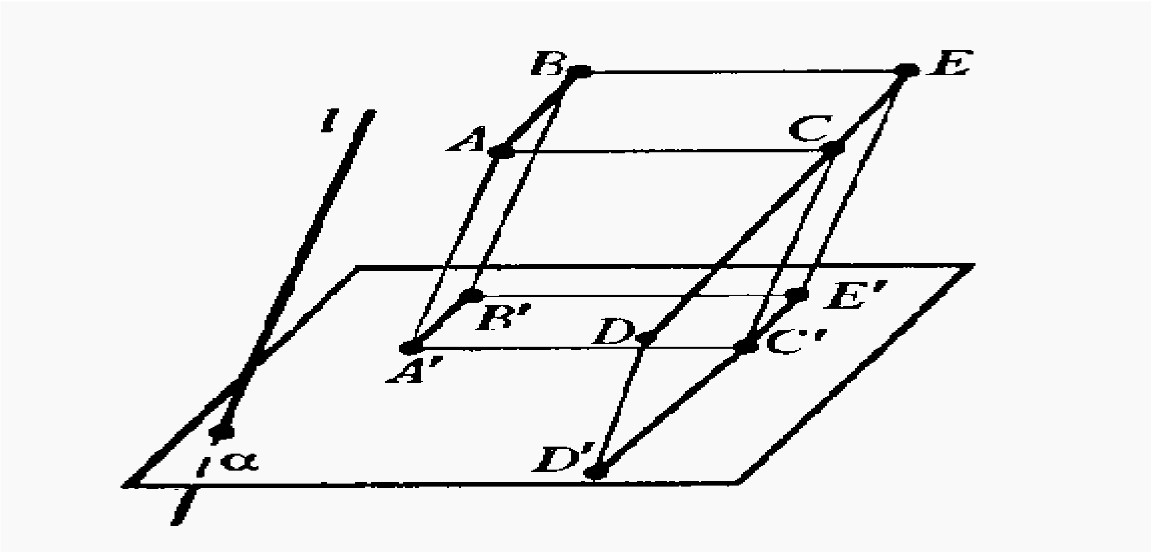


Рис. 11

Свойство 4. При параллельном проектировании сохраняется отношения площадей двух любых фигур, если направление проектирования не параллельно плоскостям фигур.

Свойство 5. Любой треугольник можно рассматривать как параллельную проекцию данного треугольника с точностью до подобия.

Доказательство свойства 5: Докажем, что в общем случае треугольник любой формы может служить параллельной проекцией равностороннего треугольника.
Действительно, пусть дан произвольный треугольник ABC в плоскости π (рис. 12). Построим на одной из его сторон. например, AC равносторонний треугольник AB_1C так, чтобы точка B_1 не принадлежала плоскости π. Обозначим через l прямую, проходящую через точки B_1 и B. Тогда ясно, что треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника AB_1C на плоскость π в направлении прямой l.

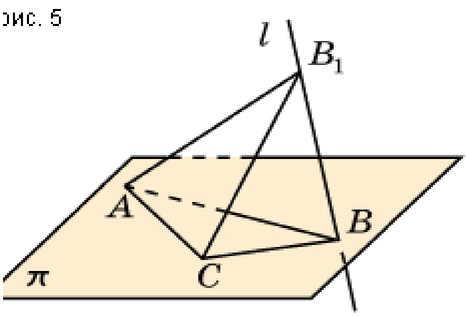
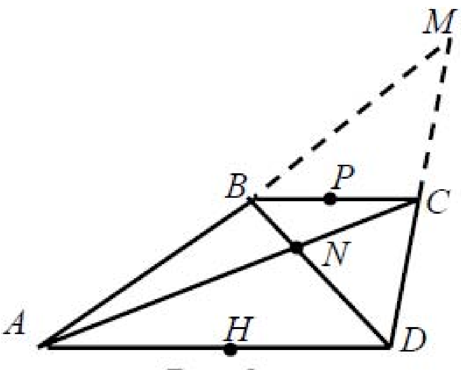


Рис. 12

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРЕКТИРОВАНИЯ.

Задача №1. Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

Решение: Изобразим на плоскости β (рис. 11) и мысленно параллельно спроектируем его на плоскость α так, чтобы треугольник *AMD* перешел в $A_1M_1D_1$ равнобедренный треугольник (рис.12).



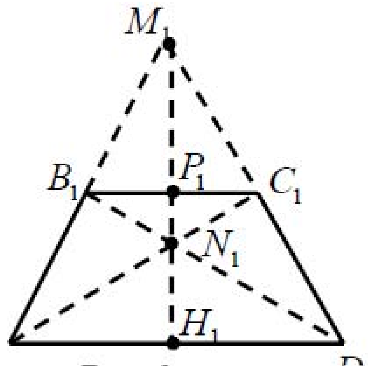


Рис. 1 Рис. 12 A_1 D_1

Из свойств параллельного проектирования следует, что проекцией трапеции ABCD является трапеция $A_1B_1C_1D_1$, то есть B_1C_1 // A_1D_1. Далее, так как треугольник $A_1M_1D_1$ равнобедренный, то его высота M_1H_1 совпадает с медианой и является осью симметрии треугольника.

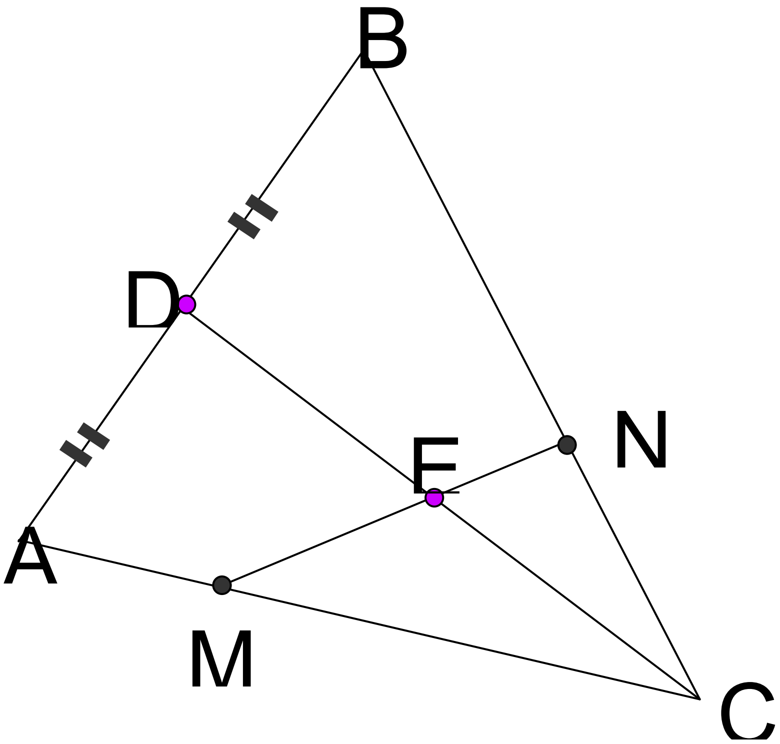
При симметрии относительно прямой M_1H_1 точка A_1 переходит в точку D_1, поэтому прямая A_1M_1 переходит в прямую D_1M_1 , а прямая B_1C_1 переходит в себя, так как она перпендикулярна оси симметрии.

Следовательно, точка C_1 переходит в точку B_1, прямая A_1C_1 переходит в прямую B_1D_1, а поэтому N_1 точка пересечения прямых A_1C_1 и B_1D_1 находится на оси симметрии, то есть на прямой M_1H_1.

В результате доказано, что для трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

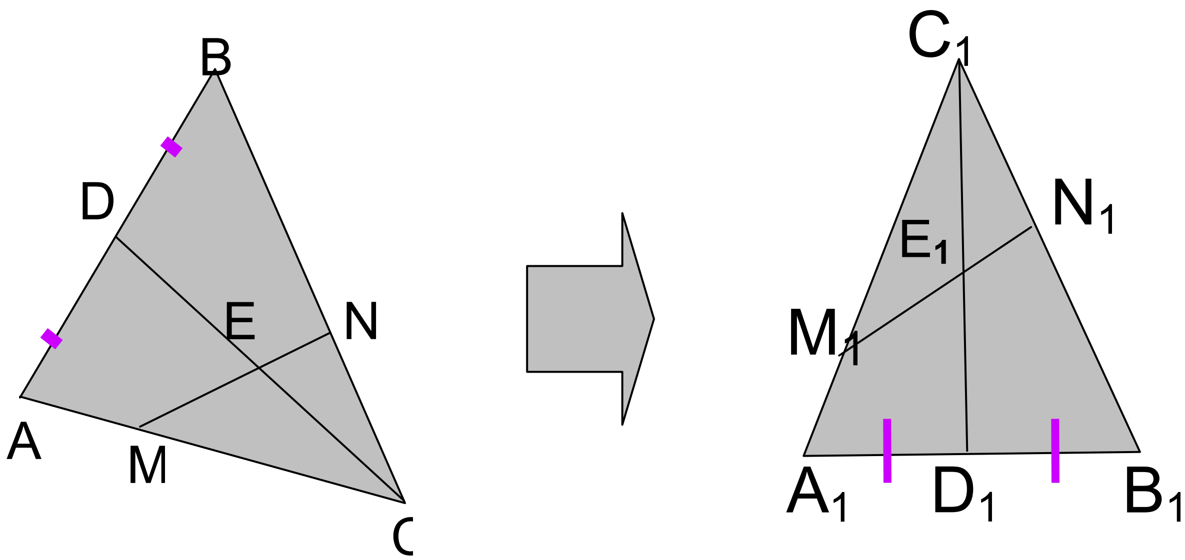
Поэтому при обратном параллельном проектировании трапеции $A_1B_1C_1D_1$ в трапецию ABCD точки M_1, P_1, N_1, H_1 , лежащие на одной прямой, проектируются соответственно в точку *M* пересечения прямых *AB* и *CD*, в точку *P* – середину основания *BC*, в точку *N* пересечения диагоналей *AC* и *BD* и в точку *H* – середину основания *AD*, причем точки M, P, N, H также лежат на одной прямой.
Что и требовалось доказать.

Задача №2. На стороне СА и СВ треугольника АВС взяты точки М и N такие, что СМ : СА = 5 : 7, CN :CB = 1 : 3. Медиана CD пересекает отрезок MN в точке Е. Найти отношение МЕ : EN.



Дано: треугольник АВС, СМ : СА = 5 : 7, CN : CB = 1 : 3.
CD – медиана, Найти МЕ:MN.

Решение : Спроектируем треугольник АВС
В равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$.



Тогда точки M,N,E перейдут в точки M_1,N_1,E_1 такие, что $C_1M_1:C_1A_1$=CM:CA=5:7; $C_1N_1:C_1B_1$=CN:CB=1:3
и $M_1E_1:E_1N_1$= ME:EN.

Кроме того, медиана CD перейдет в
Медиану C_1D_1, которая является
Также биссектрисой для треугольника
$A_1B_1C_1$ и треугольника $M_1C_1N_1$.
По свойству биссектрисы и из того, что $C_1A_1=C_1B_1$(так как треугольник ABC спроектировали в правильный треугольник $A_1B_1C_1$) следует:

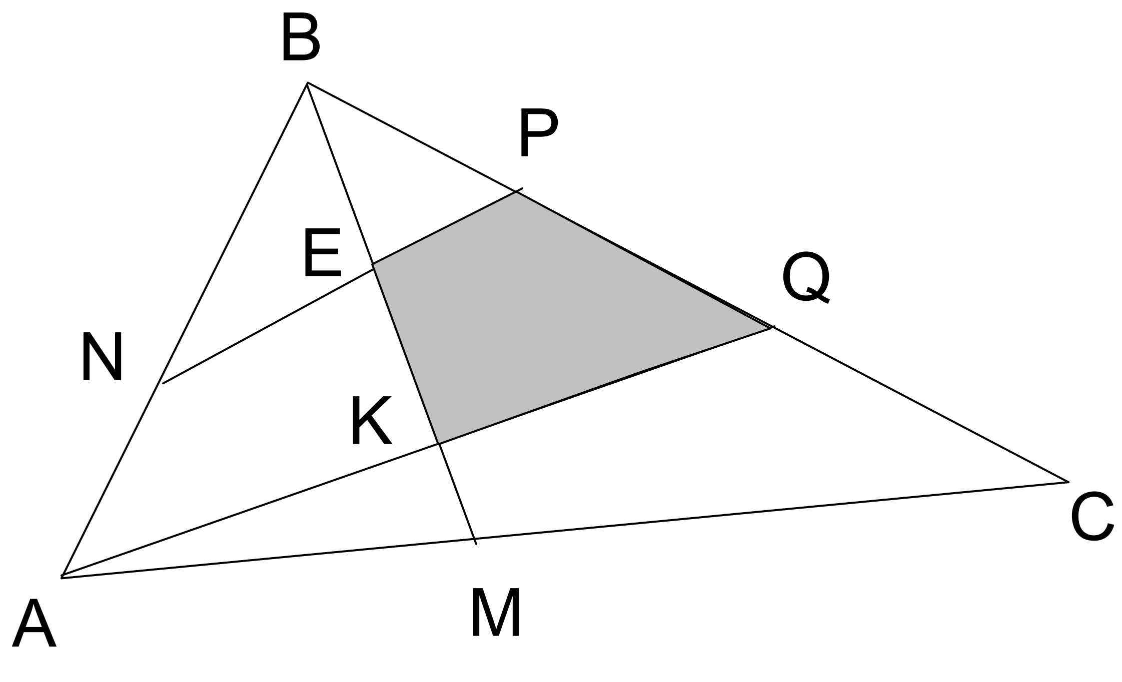
$$\frac{M1E1}{E1N1} = \frac{C_1M_1}{C_1A_1} * \frac{C_1B_1}{C_1N_1} = \frac{5}{7} * \frac{3}{1} = \frac{15}{7}$$

Т. К. $M_1E_1:E_1N_1=$ ME:EN $\Rightarrow$ ME:MN=15:22.

Ответ : ME : MN = 15 : 22.

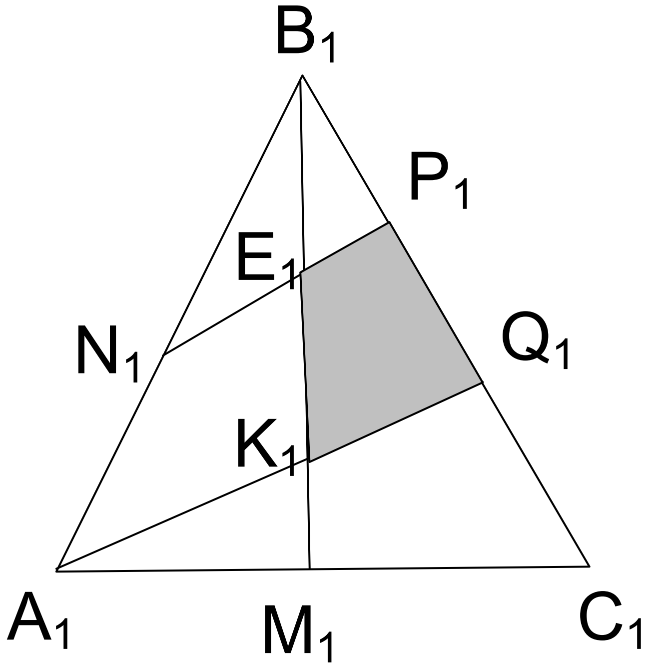
Задача №3. Дан треугольник ABC площадью S. Точки M и N – середины его сторон AC и AB соответственно. Точки P и Q делят сторону BC на три равных отрезка так, что BP = PQ = QC. Найти площадь общей части четырёхугольника ANPQ и треугольника BMC.

Дано: BP:PQ:QC=1:1:1, M-середина AC, N-середина AB,
Площадь = S, Найти площадь EPQK.



1) Спроектируем треугольник ABC
В равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$
С площадью S_1

2)



$$\frac{S_{N_1B_1P_1}}{S_1}=\frac{N_1B_1\bullet B_1P_1}{A_1B_1\bullet B_1C_1}=$$
$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Площади треугольников с общим углом относятся друг к другу как произведения сторон, содержащих общий угол.

3) Пусть сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 6x, тогда $N_1B_1=3x$, а $B_1P_1=2x$ B_1E_1- биссектриса треугольника $N_1B_1P_1$.

$$\frac{S_{N_1B_1E_1}}{S_{B_1E_1P_1}}=\frac{N_1E_1}{E_1P_1}=\frac{N_1B_1}{B_1P_1}=\frac{3}{2}$$

Как площади треугольников, одна из сторон которых лежит на одной прямой и имеющие общую высоту, проведенную к этой прямой.

Откуда $$S_{B_1E_1P_1}=\frac{2}{5}S_{N_1B_1P_1}=\frac{2}{5}\bullet\frac{S_1}{6}=\frac{S_1}{15}$$

4) $$\frac{S_{A_1B_1Q_1}}{S_1}=\frac{A_1B_1\bullet B_1Q_1}{A_1B_1\bullet B_1C_1}=\frac{1}{1}\bullet\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Площади треугольников с общим углом относятся друг к другу как произведения сторон, содержащих общий угол.

Т. Е $$S_{A_1B_1Q_1}=\frac{2S_1}{3}$$

5) Пусть сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 6x, тогда $Q_1B_1=4x$, B_1K_1 - биссектриса треугольника $A_1B_1Q_1$.

$$\frac{S_{A_1B_1K_1}}{S_{B_1K_1Q_1}} = \frac{A_1K_1}{K_1Q_1} = \frac{A_1B_1}{B_1Q_1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Как площади треугольников, одна из сторон которых лежит на одной прямой и имеющие общую высоту, проведенную к этой прямой.

Откуда $$S_{B_1E_1P_1} = \frac{2}{5} S_{N_1B_1P_1} = \frac{2}{5} \bullet \frac{S_1}{6} = \frac{S_1}{15}$$

$$S_{B_1K_1Q_1} = \frac{2}{5} S_{A_1B_1Q_1} = \frac{2}{5} \bullet \frac{2S_1}{3} = \frac{4S_1}{15}$$

6)

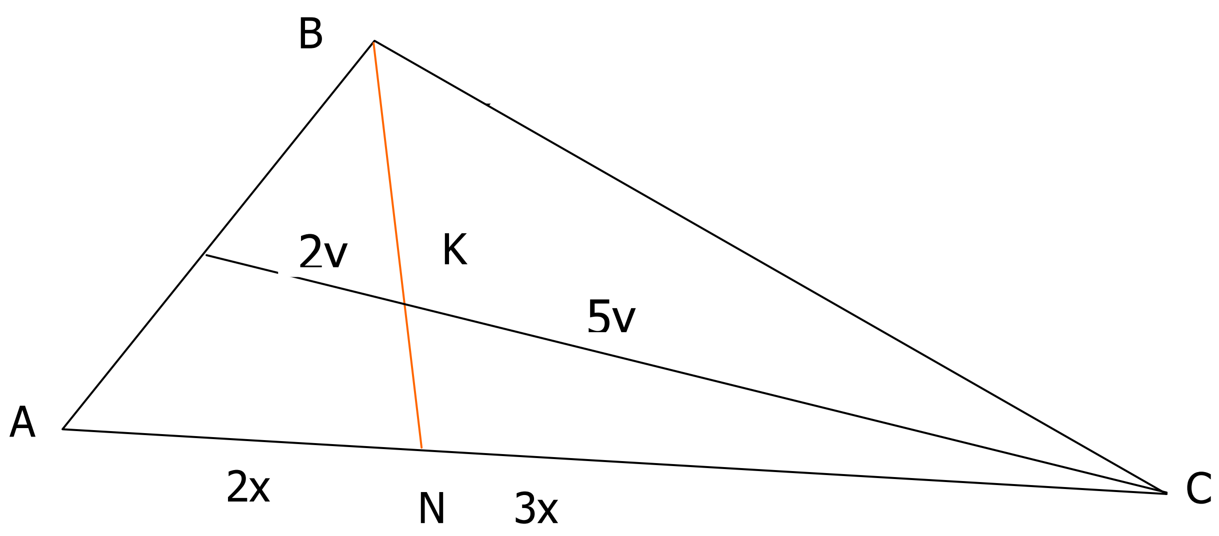
$$S_{E_1P_1Q_1K_1} = S_{K_1B_1Q_1} - S_{E_1B_1P_1} = \frac{4S_1}{15} - \frac{S_1}{15} = \frac{S_1}{5}$$

7) Следовательно

S $_{EPOK}$ = S / 5

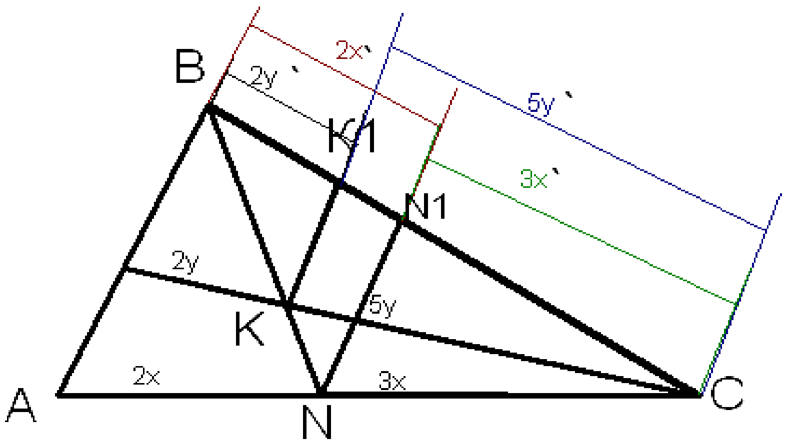
Ответ: S $_{EPQK}$ = S/5.

Задача №4. (проектирование на прямую)
 На сторонах треугольника AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно, а отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найти BK: NK, если AN : NC = 2 : 3 и CK : KM = 5:2.



Дано: треугольник ABC, AN : CN = 2 : 3, CK : KM = 5 : 2.
Найти BK: NK.

Решение:



1).Пусть направлением параллельного проектирования будет прямая AB.
Проведем KK_1 параллельно AB. Тогда BK_1 это проекция KM на прямую BC, K_1C – проекция KC на прямую BC и т.к. CK : KM = 5 : 2, следовательно $CK_1 : K_1B = 5 : 2$

2). Проведем NN_1 параллельно AB. Тогда BN_1 это проекция AN на прямую BC, N_1C – проекция NC на прямую BC и т.к. AN : CN = 2 : 3, следовательно $BN_1 : N_1C = 2 : 3$

3) Пусть $K_1N_1 = z$
BC = 7y` = 5 x` отсюда y` = 5 / 7 x`.

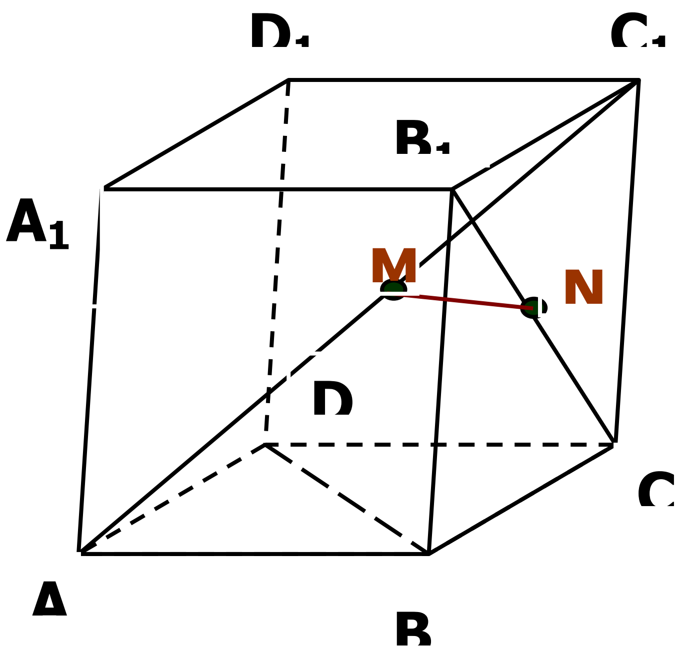
2y` = 10 / 7 x`

10 / 7 x` + z + 3 x` = 5 x` следовательно 10 / 7 x` + z = 2 x` следовательно
z = 2 x` - 10 / 7 x` = 4 / 7 x` следовательно BK / KN = 10 / 7 x` разделить на 4 / 7 x` = 5 / 2.

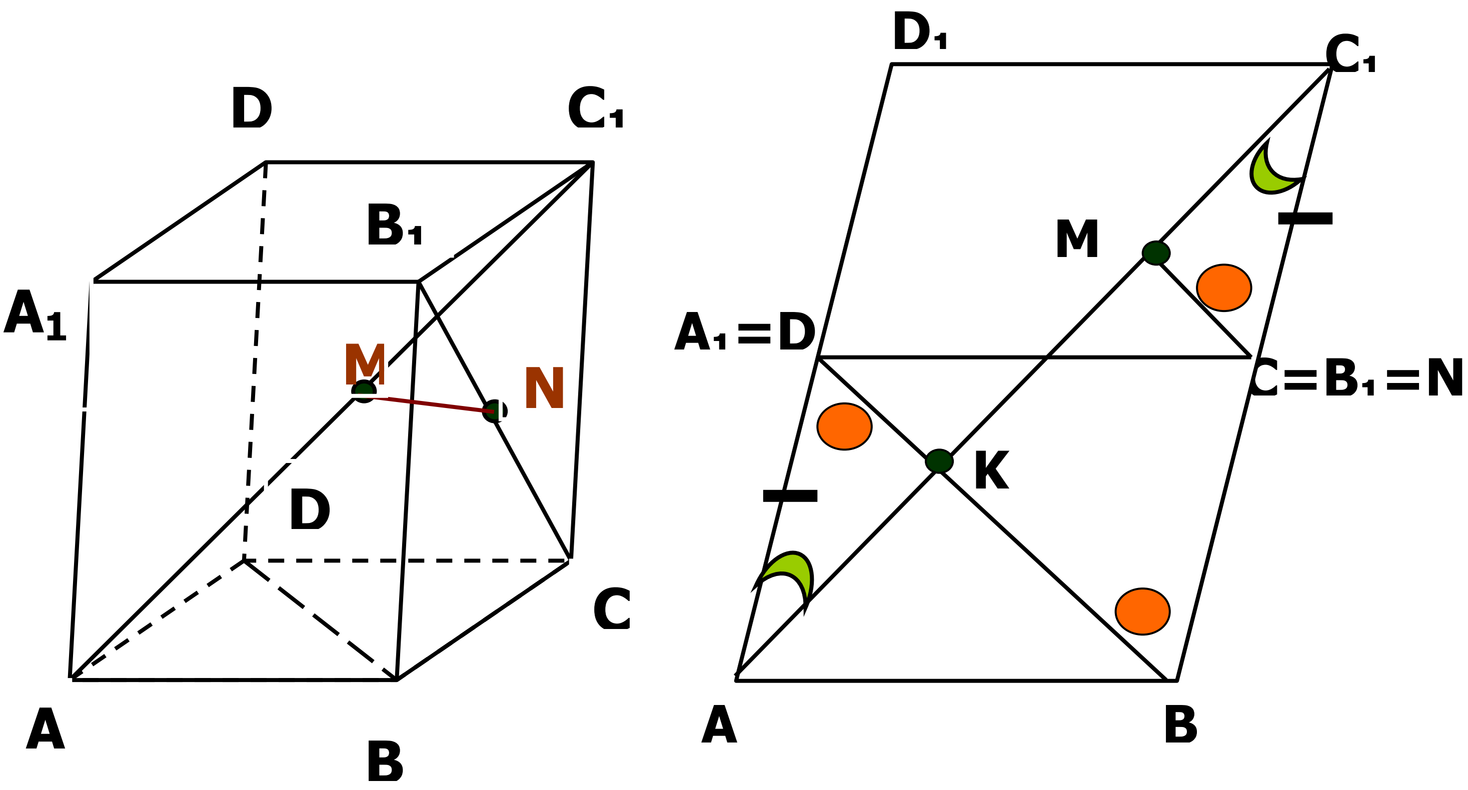
Ответ: BK : KN = 5 : 2.

Задача №5.

На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$
Взята точка M, а на прямой B_1C – точка N так, что отрезки MN и DB параллельны. Найти их отношение.



Решение:
1. Построим проекцию параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную прямой B_1C.



$BC_1 \perp B_1C$ как диагонали квадрата., а $D_1C_1 \perp$ плоскости боковой грани, а следовательно $D_1C_1 \perp B_1C$.

Т.е мы проектируем наш параллелепипед на плоскость D_1C_1BA в направлении B_1C.

Эта проекция представляет собой два равных параллелограмма ABB_1A_1 и DCC_1D_1 с общей стороной $A_1B_1=DC$, где $MN \parallel BD$. (По свойству проектирования параллельные прямые перешли в параллельные прямые).

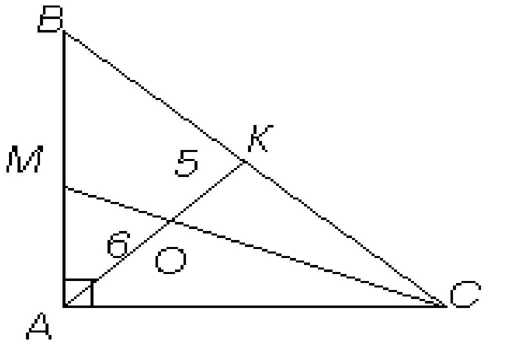
2) $MN=DK$ Т.к. $\Delta A_1KA = \Delta C_1MC$ по свойству (УСУ)

3) $BK=2MN$ Т.к. Δ KC1B подобен ΔMC_1C по двум углам (угол MC_1N и угол KC_1B – общий, а углы MCC_1 и KBC_1 равны как соответственные при параллельных $MN \parallel BK$ и секущей C_1B)

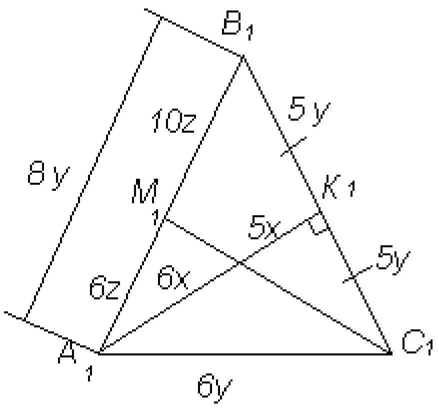
4). Из 2 и 3 следует, что $BD=3MN$.

Ответ: 1:3

Задача №6. Задача №6. АК высота прямоугольного треугольника АВС, СМ биссектриса, АО : ОК как 6 : 5. Найти отношение МО к ОС.



1) Т. к. СМ биссектриса, то АС : КС = 6 : 5
2) Проектируем тр. АВС в тр. А1В1С1 – правильный, так что АК => А1К1 – биссектрису, высоту и медиану и СМ => С1М1.
3) Т.к. А1К1 – медиана то С1К1 = К1В1 = 5 у => С1В1 = 10 у т. к. АВС - равносторонний



4) Т. к. СМ – биссектриса, то с : а = 10 : 6
5) 8у = 16z => у = 2z => М1В1 = 5у, А1М1 = 3у
6) Т. к. А1К1 является биссектрисой то А1С1 : А1М1 = С1О : М1О = 6 : 3 или 2 : 1

Ответ: МО : ОС = 1 : 2

Выводы:

1. Анализ теоретического материала по параллельному проектированию позволил узнать свойства и область применения параллельного проектирования.

2. Решение практических задач показало, что многие задачи, даже очень сложные можно решить с помощью параллельного проектирования, сэкономив при этом и время, и силы.

3. Я узнала много нового и интересного, работая над данной темой. Многие задачи оказываются не такими трудными, как казалось бы. Это действительно занимательно и увлекательно. Так же эта прекрасная тема пригодится мне в будущем, при изучении стереометрии в старших классах.

Заключение.

В заключении мне хотелось бы повторить слова эпиграфа

Геометрия ..., наравне со многими другими разделами математики, дает возможность почувствовать красоту математики вообще и может стать для кого-то началом пути в «большую науку». Кроме того, каждый любитель геометрии ... имеет шанс открыть нечто новое и пополнить ее сокровищницу собственной драгоценной находкой, ибо геометрия поистине неисчерпаема!

А. Г. Мякишев «Элементы геометрии треугольника»

Список литературы:

1) А. Ю. Калинин, Д. А. Терешин. «Стереометрия 10». МФТИ 1996.

2) А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. «Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач». Киев, Агрофирма «Александрия» 1993.