

РОНО Устиновского района г. Ижевска

МОУ СОШ № 32

Исследовательская работа на тему:

Симметрия в алгебре.

Выполнил:

Ученик 10 класса М

МОУ СОШ №32

Н.Д. Баженов.

Учитель:

П.А.Стаханова

Ижевск, 2009

Содержание:

1. Введение стр 3
2. **Что такое симметрия.** Стр 3
3. Симметрия графиков функций. Стр 4
4. «**Центр тяжести**», метод симметризации. Стр7
5. Возвратные уравнения – симметрические уравнения четвертой степени.
6. Метод симметричных многочленов в системах с двумя неизвестными.
7. Решение систем с двумя переменными при помощи симметрических многочленов.
8. Тождества и задания на упрощения.стр 12
9. Использование симметрии при решении задач с параметром.стр13
10. Заключение. стр17
11. Список литературы стр 18

Введение

В этой работе я исследую симметрию: ее проявление и использование в алгебре. Актуальность темы «Симметрия в алгебре» в том, что она дает нам более полное представление о симметрии, причем не только с точки зрения геометрии, но и с точки зрения алгебры.

Давно известно, что решение многих задач из курса алгебры и начал анализа значительно облегчается, становится “прозрачным” и красивым, если заметить и использовать определенные особенности, например, симметричность условия задачи, применяемых математических моделей, четность или нечетность функций, разного рода сходство математических объектов.

Данная тема лишь вскользь изучается в школьном курсе, причем в довольно разрозненных главах. В своей работе я попытался этот материал систематизировать. В частности в работе показано, как используется симметрия при построении графиков, как симметризация позволяет упрощать решение некоторых типов уравнений, рассмотрены методы решения систем при помощи симметрических многочленов, доказательства тождеств, а также использование симметрии при решении некоторых типов задач с параметром.

1. Что такое симметрия.

Симметрия — слово греческое и обозначает оно регулярную систему, гармонию между частями целого.

Признаки симметрии встречаются в геометрических фигурах, в неорганической природе (кристаллы), в растительном мире, (расположение листьев, лепестков цветов), в животном мире (расположение некоторых наружных органов), в строительстве, искусстве (орнамент, узоры), в рукоделье (кружева, вышивки), в технике — одним словом везде, потому что симметрия является структурной необходимостью организмов и устройств. Что такое симметрия в геометрии — мы узнали при изучении осевой симметрии, центральной симметрии (на плоскости) и пространственной симметрии, а с симметрией в алгебре сталкивались, изучая свойства функций.

Что же такое симметрия? И для чего она нужна? Как она связана с алгеброй? Сегодня я попытаюсь исследовать и доказать, что во-первых, симметрия является одним из способов решения задач не только в геометрии, в природе и искусстве, но и в алгебре, а во-вторых доказать что симметрия в алгебре является одним из самых рациональных способов для решения некоторых видов уравнений, систем.

2. Симметрия графиков функций.

- Впервые с симметрией мы встречаемся при построении графиков или при графическом решении задач. В этом случае симметрия зависит от четности, нечетности функции. Напомним, если функция $f : [-X, X] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется нечётной, если справедливо равенство

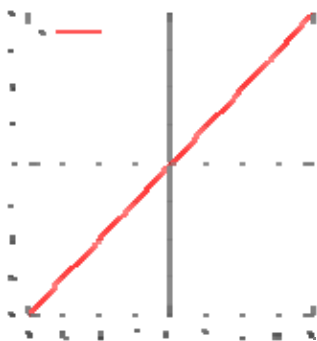
$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in [-X, X].$$

- Функция f называется чётной, если справедливо равенство

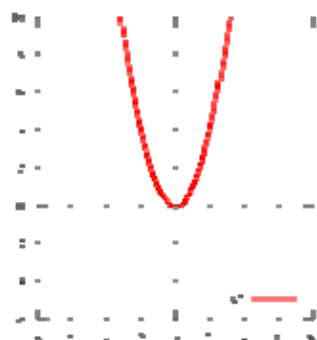
$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in [-X, X].$$

- Если не выполняется ни одно из этих равенств, то функция называется *функцией общего вида*.
- График нечётной функции симметричен относительно начала координат « O ».
- График чётной функции симметричен относительно оси ординат « Oy ».

Приведем примеры четной и нечетной функции:



перед нами график нечетной функции $f(x)=x$. Эта функция симметрична началу координат O .



перед нами график четной функции $f(x)=x^2$. Эта функция симметрична оси « Oy ».

Определенного определения симметрии в алгебре нет. Однако с одной стороны это применение при графическом решении, когда корни уравнения « X » = « $-X$ ». С другой стороны это метод решения при помощи симметричных многочленов.

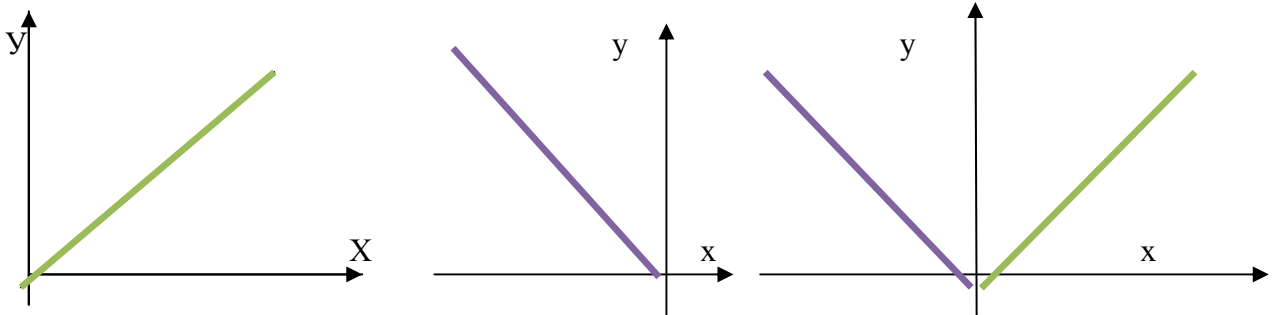
Также симметрия рассматривается в алгебраических функциях типа:

$$1) f(x) = |x|$$

Напомним, что в алгебре через $|x|$ обозначают абсолютную величину, или модуль числа «X».

Итак:
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } "x \geq 0" \\ -x, & \text{если } "x \leq 0" \end{cases}$$

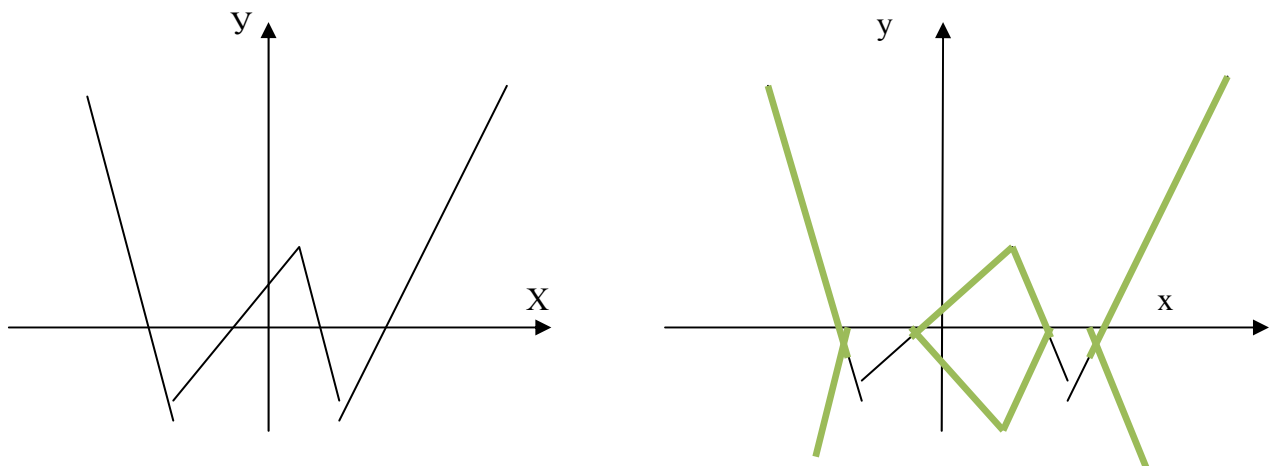
Начертим этот график:



В первом случае рассматривается график $y = |x|, x \geq 0$. Во втором случае $x \leq 0$. И третий случай - $y = |x|, x \in \mathbb{R}$

$$2) x = |y|$$

При $y \geq 0$ график сохраняется, также отражается симметрично оси Oх.



На первом графике изображен график функции $f(x) = y$. На втором изображен график функции $f(x) = |y|$

Рассмотрим еще пару примеров симметрии при построении графиков:

Задание № 1.

Построить график функции: $|y| = x^2 - 4|x| + 3$

Для построения графика, мы приводим уравнение к виду:

$$|y| = |x|^2 - 4|x| + 3$$
$$|y| = f(|x|)$$

Для построения этого типа графика пользуемся свойствами симметрии. Т.е. строим

график только при $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

И только после того как построим этот график, мы рисуем симметрии относительно оси «ОУ» и оси «ОХ», и совмещаем их.

Построим график:

Задание № 2.

Построить график заданной функции: $x^2 + y^2 - 2|x| + 4y + 1 \leq 0$

Для построения этого графика данное неравенство приводит к виду:

$$f(x, y) = |x^2| + y^2 - 2|x| + 4y + 1 \leq 0$$

$$(|x| - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 4$$

$f(|x|, y)$ обозначает, что необходимо использовать симметрию относительно оси «ОУ». Для построения этого графика необходимо построить лишь при условии, что $x \geq 0$, а далее построить симметрию относительно оси «ОУ»

Построим график:

2.1 «Центр тяжести», метод симметризации

в этом разделе мы рассмотрим симметрические уравнения. Итак определение:

симметрическое уравнение- это уравнение графическое решение которого содержит симметрию относительно оси «Oy» или «Ox» или начала координат.

Способ, позволяющий приводить уравнение четвертой степени к трехчленному виду,- симметризация. Для того чтобы решить подобный вид задач:

" $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = k$ " мы это уравнение приводим к биквадратному уравнению при помощи введения новой переменной «y»

$$y = x - \frac{a + b + c + d}{4} \Leftrightarrow x = y + \frac{a + b + c + d}{4}$$

Т.е. при помощи новой переменной мы выражаем искомый член «x» и

подставляем в первоначальное уравнение. Значение иногда называют «центром тяжести».

Задание № 1.

Решить уравнение: $(x - 3)(x - 4)(x - 7)(x - 8) = 60$

Вводим новую переменную: $y = x - \frac{3+4+7+8}{4} = x - \frac{11}{2} + y$

После замены получилось: $(y - \frac{5}{2})(y - \frac{3}{2})(y + \frac{5}{2})(y + \frac{3}{2}) = 60$

$$(y^2 - \frac{25}{4})(y^2 - \frac{9}{4}) = 60$$

$$x^2 - \frac{17x^2}{2} - \frac{735}{16} = 0$$

$$y = 7/2; y = -7/2$$

после того как подставим значения «y» мы получим значения «x» $x=2$; $x=9$.

Задание № 2.

Решить уравнение $(6-x)^4 + (8-x)^4 = 16$;

Уравнение вида $(x-a)^4 + (x-b)^4 = A$, где $A > 0$, можно решить, также используя метод симметризации через «центр тяжести», т.е. делая замену

$$y = x - \frac{a+b}{2}$$

Т.е $y = x - \frac{6+8}{2} = x - 7$. Тогда $x = y + 7$. Подставим в уравнение, получим $(1+y)^4 + (1-y)^4 = 16$.

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим $y^4 + 6y^2 - 7 = 0$.

Откуда найдем $y = \pm 1$, а $x=6$ и $x=8$.

Ответ: $x=6$ и $x=8$

2.2 Возвратные уравнения – симметрические уравнения четвертой степени.

Симметрические многочлены можно с успехом применять и для решения некоторых уравнений высших степеней. В этом пункте мы рассмотрим так называемые возвратные уравнения и симметрические уравнения четвертой степени.

Возвратным уравнением называют уравнения, в которых коэффициенты равноудалены от середины и совпадают. Симметрические уравнения четвертой степени – это уравнения вида:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, где, $a \neq 0, c \in \mathbb{R}$. Например:

$z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 3z + 1$ - перед нами возвратное уравнение пятой степени.

$x^4 - 3x^3 + 11x^2 + 3x + 1$ - а это возвратное уравнение четвертой степени.

Рассмотрим уравнения четвертой степени: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

Так как $x=0$ – не корень данного уравнения то разделим обе части на x^2 получим уравнение, равносильное исходному:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \text{ или } a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Теперь имеем квадратное уравнение: $a(t^2 - 2) + bt + c = 0$

Если оно имеет корни t_1, t_2 то получим совокупность

$$x + \frac{1}{x} = t_1 \qquad x + \frac{1}{x} = t_2$$

решая которую, найдем корни данного уравнения.

Например:

Задание № 1.

Уравнение: $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$

$$x(2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + x + \frac{1}{x}) = 11 \quad (11)$$

замена: $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \quad x + \frac{1}{x} = t$

$$x((2t^2 - 2) + t - 11) = 0$$

$$2t^2 + t - 15 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad x + \frac{1}{x} = -2.5$$

Ответ: $x=2$; $x=0.5$; $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Возвратные уравнения можно решить с помощью симметрических многочленов. В этом случае $z + \frac{1}{z} = O_1$ - это один многочлен, $1 = O_2$ - это второй многочлен.

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{1}{z^2} &= O^2 - 2 \\ z^3 + \frac{1}{z^3} &= O^3 - 3O \\ z^4 + \frac{1}{z^4} &= O^4 - 4O^2 + 2 \\ z^5 + \frac{1}{z^5} &= O^5 - 5O^3 + 5O \end{aligned}$$

Задание № 2.

Решим возвратное уравнение:

$$\begin{aligned} 4z^{10} - 21z^8 + 17z^6 + 17z^4 - 21z^2 + 4 &= 0 \\ z^5(4z^5 - 21z^3 + 17z + 17\frac{1}{z} - 21\frac{1}{z^3} + 4\frac{1}{z^5}) &- \\ z^5 \left(4 \left(z^5 + \frac{1}{z^5} \right) - 21 \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + 17 \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) &= 0 \\ z^5(4O^5 - 41O^3 + 100O) &= 0 \end{aligned}$$

Так как $z = 0$ не является корнем исходного уравнения, то мы приходим к следующему уравнению относительно O :

$$O(4O^4 - 41O^2 + 100) = 0$$

Делаем замену: « t » = O^2 следует, что мы решаем квадратное уравнение.

$$t_1 = 4 \qquad t_2 = \frac{25}{4}$$

В результате мы находим пять значений для o : $o=2$; $o = -2$; $o = \frac{5}{2}$; $o = -\frac{5}{2}$;

Это означает, что для нахождения корней первоначального уравнения мы имеем пять уравнений (т.к. $o = z + 1/z$), решая которые мы находим корни: $z = -1$; $z = -2$; $z = 2$; $z = 1$; $z = \frac{1}{2}$; $z = -\frac{1}{2}$;

Ответ: $z = -1$; $z = -2$; $z = 2$; $z = 1$; $z = \frac{1}{2}$; $z = -\frac{1}{2}$;

2.3 Метод симметричных многочленов в системах с двумя неизвестными.

что общего у этих двух систем?

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + y + xy = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 8(y^2 + x^2) = 65 \\ 2(x + y) = 5xy \end{cases}$$

Все эти системы имеют одно общее свойство — левые части уравнений являются многочленами, в которые « x » и « y » входят одинаковым образом. Именно для таких систем уравнений и применимы излагаемые далее методы решения.

Многочлены, в которые « x » и « y » входят одинаковым образом, называют симметрическими. Точнее говоря:

Определение:

Многочлен от « x » и « y » называют симметрическим, если он не изменяется при замене « x » на « y », а « y » на « x ». Симметрические многочлены « $x + y$ » и « xy » являются самыми простыми. Их называют элементарными симметрическими многочленами от « x » и « y ». Для них используют специальные обозначения:

$$O_1 = x + y \quad O_2 = xy$$

Кроме " O_1 " и " O_2 ", нам часто будут встречаться так называемые степенные суммы, т. е. многочлены " $x^n + y^n$ "

Принято обозначать многочлен таким образом:

$$x^n + y^n = S_n$$

Рассмотрев симметрические многочлены, возникает вопрос, является ли этот прием построения симметрических многочленов общим, т. е. можно ли с его помощью получить любой симметрический многочлен?

Рассмотрение примеров делает это предположение вероятным. Например, степенные суммы S_1, S_2, S_3, S_4 без труда выражаются через O_1 и O_2 :

$$S_1 = O_1$$

$$S_2 = O_1^2 - 2O_2$$

$$S_3 = O_1(O_1^2 - 3O_2)$$

$$S_4 = (O_1^2 - 2O_2)^2 - 2O_2^2$$

Разбор дальнейших примеров дает тот же результат, какой бы симметрический многочлен мы ни взяли, после более или менее сложных выкладок его удастся выразить через элементарные симметрические многочлены O_1 и O_2 . Таким образом, примеры приводят нас к предположению о справедливости следующей теоремы:

Теорема: Любой симметрический многочлен от «x» и «y» можно представить в виде многочлена от " $O_1 = x + y$ " и " $O_2 = xy$ ", каждую степенную сумму " $x^n + y^n = S_n$ " можно представить в виде многочлена от " O_1 " и " O_2 ".

Для того, чтобы доказать это утверждение мы умножаем обе части уравнения $S_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$ на " O_2 ".

$$O_1 S_{k-1} = (x + y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = x^k + xy^{k-1} + yx^{k-1} + x^k = S_k + O_2 S_{k-2}$$

Тогда отсюда следует, что: $S_k - O_1 S_{k-1} - O_2 S_{k-2}$

С помощью этой формулы мы можем вывести любой многочлен и степенную сумму.

2.4 Решение систем с двумя переменными при помощи симметрических многочленов.

Задание № 1.

Рассмотрим пример:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Введем замены: " $O_1 = x + y$ " и " $O_2 = xy$ " и, пользуясь формулой $S_k - O_1 S_{k-1} - O_2 S_{k-2}$, мы переписываем нашу систему.

У нас получается:
$$\begin{cases} O_1^3 - 3O_1 O_2 = 8 \\ O_1^2 - 2O_2 = 4 \end{cases}$$

Находя из второго уравнения значение O_2 и подставляя его в первое уравнение и умножая на -2, мы получаем следующее уравнение относительно неизвестного O_1 :

$$O_1^3 - 12O_1 + 16 = 0$$

Для нахождения значений O_1 можно было бы воспользоваться общей формулой решения уравнений третьей степени, но в данном случае проще воспользоваться теоремой Безу.

$$O_1 - 2$$

$$O_1^3 - 12O_1 + 16 = (O_1 - 2)(O_1^2 + 2O_1 - 8)$$

Решив квадратное уравнение, в итоге мы нашли 2 корня

$$o_1 = 2$$

$$o_1 = -4$$

Зная зависимость $o_1^2 - 2o_2 = 4$, мы находим o_2 и решаем системы

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

Итак, рассмотрев эту систему, мы полностью убедились, что метод симметрических многочленов - самый рациональный способ решения подобных видов задач. Если бы не

этот способ нам бы пришлось иметь дело с иррациональной системой: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x = \sqrt{4 - y^2} \end{cases}$,

где возможно мы бы ошиблись.

Задание № 2.

Решить уравнение $\sin x + \cos x = 1$. Несмотря на то, что можно привести достаточно много (не менее 12) различных способов решения этого уравнения, есть возможность использования симметрии, сведя это тригонометрическое уравнение с помощью замены

$$a = \sin x; b = \cos x \text{ к системе симметрических алгебраических уравнений: } \begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

2.5 Тожества и задания на упрощения.

Делая замены и зная как расписываются степенные суммы, мы можем решать уравнения с тремя неизвестными, не проводя их иррациональному виду. Однако, не только решать системы, но и упрощать выражения (раскладывая на множители) нам помогает метод симметрических многочленов. Например:

Задание № 1.

$$\begin{aligned} & x^3 + z^3 + y^3 - 3xzy - S_3 - 3O_3 - (O_1^3 - 3O_1O_2 + 3O_3) - 3O_3 - \\ & = O_1^3 - 3O_1O_2 = O_1(O_1^2 - 3O_2) = (z + x + y)(z^2 + x^2 + y^2 - xz - xy - zy) \end{aligned}$$

В целом ряде задач на доказательство тождеств также с успехом могут быть применены элементарные симметрические многочлены. Рассмотрим пример:

Задание № 2.

$$\text{Доказать, что если } \langle X+Y+Z=0 \rangle, \text{ то : } x^4 + z^4 + y^4 = 2(xz + xy + zy)^2$$

Решить эту задачу очень легко, необходимо расписать $x^4 + z^4 + y^4$ по формуле степенной суммы. И после мы получим необходимый нам результат, т.к. «X+Y+Z=0».

$$x^4 + z^4 + y^4 = o_1^4 - 4o_1^2 o_2 + o_2^2 + 4o_1 o_3$$

Следует: $x^4 + z^4 + y^4 = o_2^2$

$$x^4 + z^4 + y^4 = 2(xz + xy + zy)^2$$

Тождество доказано.

6. Использование симметрии при решении задач с параметром.

В задачах, которые мы рассмотрим ниже, обязательно фигурирует аналитическое выражение, геометрический образ которого имеет или ось симметрии, или плоскость симметрии. Во всех задачах в той или иной форме присутствует требование единственности решения. Если описываемые аналитические выражения конструируют уравнения и координаты точки М являются его решением, то обязательно найдется еще одна точка N, симметричная точке М, координаты которой так же будут являться решением. Следовательно, для выполнения требования единственности решения необходимо, чтобы точки М и N совпадали, т.е. М лежало на оси симметрии. Высказанные соображения и составляют основу одного из приемов поиска необходимых условий, о котором будет идти речь в настоящем

Задание № 1.

Найти все а, при которых система
$$\begin{cases} a(x^2 + 1) = y + 1 - |x| \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение

Легко заметить, что если $(x_0; y_0)$ — решение системы, то $(-x_0; y_0)$ также является ее решением. Поэтому условие «х» = 0 — необходимое для существования единственного решения. Важно понимать, что оно не является достаточным: наша система может иметь несколько решений вида $(0; y_0)$ и, более того, вообще не иметь решений. Положим $x = 0$.

Тогда:
$$\begin{cases} a = y + 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Отсюда, $a = 0$ или $a = 2$. Итак, искомые значения параметра следует выбирать в множестве

$\{0; 2\}$. При $a = 0$ получаем:
$$\begin{cases} y + 1 - |x| = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Отсюда получаем:
$$\begin{cases} x + 1 = |x| \\ y(y + 1) = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет три решения $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. Следовательно, значение $a = 0$ придется исключить. При $a=2$ получается:

$$\begin{cases} 2x^4 + |x| = y - 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения имеем $y \geq 1$ (т.к. $2x^4 + |x| \geq 0$). В то же время второе уравнение позволяет сделать вывод, что $y \leq 1$. Следовательно, $y = 1$, а значит, $x=0$.

Проверка показывает, что пара $(0; 1)$ — решение, а в силу ограничения для переменной y ($y > 1$ и $y < 1$) оно единственное.

Ответ: при $a=2$.

Рассмотрим еще один пример использования симметрии и аналитических выражений:

Задание № 2.

При каких «а» система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} y \geq (x+y)^2 - x - 2y + a \\ x \geq (y-x)^2 - 3y + x + a \end{cases}$$

После упрощения:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - x - 3y + a \leq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 3y + x + a \leq 0 \end{cases}$$

Теперь становится очевидным, что $x = 0$ — необходимое условие единственности решения системы. Если $x=0$, то получаем:

$$2y \geq y^2 - y + a \quad ; \quad y^2 - 3y + a \leq 0$$

Это неравенство имеет единственное решение, если дискриминант соответствующего квадратного трехчлена равен нулю, т.е. $9-4a=0$

$$\frac{9}{4} = a$$

Проверка показывает, что при $a = \frac{9}{4}$ система имеет единственное решение

$$(0; \frac{3}{2})$$

Ответ: при $a = \frac{9}{4}$

Рассмотрим еще пару примеров:

Задание №3.

При каких «а» уравнение имеет единственное решение:

$$x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$$

Пусть, " x_0 " – корень, тогда " $-x_0$ "-корень. Для того чтобы было единственное решение, нужно, чтобы $x_0 = 0$

$$-2a \sin(\cos 0) + a^2 = 0$$

$$-2a \sin 1 + a^2 = 0$$

Получается, что: $a=0$ и $a=2a \sin 1$; проверим, действительно ли при этих а решение единственно. Для этого подставим а в наше уравнение.

При «а = 0» $x^2 = 0$ - единственное решение.

При «а = $2 \sin 1$ » следует:

$$x^2 - 4 \sin 1 \sin(\cos x) + 4 \sin^2 1 = 0$$

$$x^2 + 4 \sin^2 1 = 4 \sin 1 \sin(\cos x)$$

Так как " $x^2 + 4 \sin^2 1 \geq 4 \sin^2 1$ " и " $4 \sin 1 \sin(\cos x) \leq 4 \sin^2 1$ "

из этого условия следует, что равенство возможно только если обе части равны 4, а это выполнено только при « $x=0$ ». Т.е. при

$a = 2 \sin 1$ решение единственно.

Ответ: при $a = 0$ и при $a = 2 \sin 1$

Задание №4.

$$2\pi^2(x-1) + 4a \cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$

Замена: $t=2\pi(x-1)$; $\cos(2\pi x) = \cos(2\pi(x-1))$

Умножим первоначальное уравнение на 2

$$t^2 + 8a \cos t - 18a^3 = 0$$

Из этого выражения следует что " t_0 " – корень и " $-t_0$ "-корень

$t=0$ следует что: $8a - 18a^3$ следует: $\begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ a = \frac{2}{3} \\ a = 0 \end{cases}$

проверка:

- 1) при " $a=0$ " $t=0$ следует $x=1$
- 2) при " $a = -\frac{2}{3}$ " следует $t^2 - \frac{16}{3} \cos t + \frac{16}{3} = 0$; $t^2 = \frac{16}{3}(-1 + \cos t)$, так как " $t^2 \geq 0$ " и " $\frac{16}{3}(-1 + \cos t) \leq 0$ " следует $t=0$, следует $x=1$
- 3) при " $a = \frac{2}{3}$ " следует $t^2 = \frac{16}{3}(1 - \cos t)$ Аналитически решить это уравнение мне не удалось (смог найти только решение $t=0$) – поэтому попытаюсь *построить графики функций*.
 $y=t^2$ и $y=\frac{16}{3}(1 - \cos t)$ и по ним определить, сколько решений имеет это уравнение

Для того чтобы определить в двух ли точках пересекутся графики или нет, мы берем точку « $\frac{\pi}{6}$ » и подставим в функцию, получается:

« $\frac{\pi^2}{36} < \frac{16}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ » Получается, что в точке $\frac{\pi}{6}$ график $y=t^2$ находится ниже

графика $y=\frac{16}{3}(1 - \cos t)$, но парабола потом уходит бесконечно вверх, в то время как

множество значений функции $y=\frac{16}{3}(1 - \cos t)$ всего лишь $\left[0; \frac{16}{3}\right]$

т.е. графики пересекутся как минимум 2-х точках, что уже не удовлетворяет решению задачи

Ответ: при $a=0$; при $a = -\frac{2}{3}$

Заключение

Итак, можно точно сказать что симметрия встречается не только в геометрии, природе и искусстве, но и в ряде задач алгебры. Т.е это гораздо более широкое понятие, чем раньше я себе его представлял. И знание свойств симметрии позволяет существенно облегчить решение многих задач, в которых эта симметрия встречается – начиная от построения графиков функций и заканчивая задачами с параметрами.

Давно известно, что решение многих задач из курса алгебры и начал анализа значительно облегчается, становится “прозрачным” и красивым, если заметить и использовать определенные особенности, например, симметричность условия задачи, применяемых математических моделей, четность или нечетность функций, разного рода сходство математических объектов.

Чаще всего симметрия в широком смысле этого слова имеет место в задачах на решение систем уравнений и неравенств, иррациональных уравнений, неравенств, тригонометрических уравнений и неравенств и их систем, в некоторых графических задачах, не говоря уже о специальных задачах геометрии. Так, например, многие из задач алгебры решаются единообразным методом, использующим замену переменных и основанным на теории симметрических многочленов.

Работа над этим проектом дала мне не только неоценимые знания о симметрии в алгебре, и показала мне не просто новый метод решения задач, а приоткрыла завесу над прекрасной стороной математики, где ученик в полной мере сможет удовлетворить потребность своего логического мышления в анализе, поиске ассоциаций, классификации понятий и синтезе различных идей.

Список литературы:

1. Болтянский В.Г. и др. Симметрия в алгебре. - М.: Наука, 1967.
2. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. - М.: Наука, 1971.
3. Березин В.Н. и др. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике. Книга для учителя. - М.: Просвещение, 1985.
4. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике. Алгебра. - М.: Наука, 1987.
5. Черкасов О.Ю. и др. Математика: Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. - М.: АСТ-Пресс, 2001.