РОНО Устиновского района г. Ижевска

МОУ СОШ № 32

Исследовательская работа на тему:

Симметрия в алгебре.

Выполнил:

Ученик 10 класса М

МОУ СОШ №32

Н.Д. Баженов.

Учитель:

П.А.Стаханова

Ижевск, 2009

Содержание:

Введение

В этой работе я исследую симметрию: ее проявление и использование в алгебре. Актуальность темы «Симметрия в алгебре» в том, что она дает нам более полное представление о симметрии, причем не только с точки зрения геометрии, но и с точки зрения алгебры.

Давно известно, что решение многих задач из курса алгебры и начал анализа значительно облегчается, становится “прозрачным” и красивым, если заметить и использовать определенные особенности, например, симметричность условия задачи, применяемых математических моделей, четность или нечетность функций, разного рода сходство математических объектов.

Данная тема лишь вскользь изучается в школьном курсе, причем в довольно разрозненных главах. В своей работе я попытался этот материал систематизировать. В частности в работе показано, как используется симметрия при построении графиков, как симметризация позволяет упрощать решение некоторых типов уравнений, рассмотрены методы решения систем при помощи симметрических многочленов, доказательства тождеств, а также использование симметрии при решении некоторых типов задач с параметром.

1. Что такое симметрия.

Симметрия — слово греческое и обозначает оно регулярную систему, гармонию между частями целого.

Признаки симметрии встречаются в геометрических фигурах, в неорганической природе (кристаллы), в растительном мире, (расположение листьев, лепестков цветов), в животном мире (расположение некоторых наружных органов), в строительстве, искусстве (орнамент, узоры), в рукоделье (кружева, вышивки), в технике — одним словом везде, потому что симметрия является структурной необходимостью организмов и устройств. Что такое симметрия в геометрии — мы узнали при изучении осевой симметрии, центральной симметрии (на плоскости) и пространственной симметрии, а с симметрией в алгебре сталкивались, изучая свойства функций.

Что же такое симметрия? И для чего она нужна? Как она связана с алгеброй? Сегодня я попытаюсь исследовать и доказать, что во-первых, симметрия является одним из способов решения задач не только в геометрии, в природе и искусстве, но и в алгебре, а во-вторых доказать что симметрия в алгебре является одним из самых рациональных способов для решения некоторых видов уравнений, систем.

2. **Симметрия графиков функций.**

- Впервые с симметрией мы встречаемся при построении графиков или при графическом решении задач. В этом случае симметрия зависит от четности , нечетности функции. Напомним, если функция $f:[-X,X]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$называется нечётной, если справедливо равенство

  $$f(-x)=-f(x),\quad \forall x\in[-X,X].$$

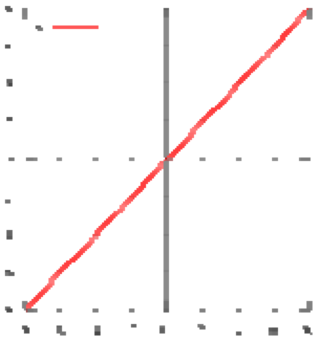
- Функция f называется чётной, если справедливо равенство

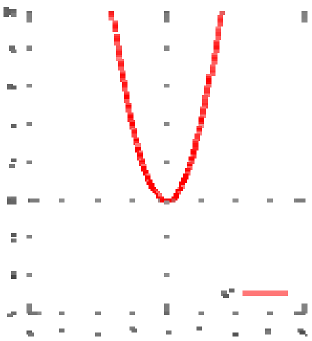
  $$f(-x)=f(x),\quad \forall x\in[-X,X].$$

- Если не выполняется ни одно из этих равенств, то функция называется *функцией общего вида*.

- График нечётной функции симметричен относительно начала координат «*O*».
- График чётной функции симметричен относительно оси ординат «*Oy*».

Приведем примеры четной и нечетной функции:

 перед нами график нечетной функции f(x)=x. Эта функция симметрична началу координат 0.

 перед нами график четной функции f(x)=x^2. Эта функция симметрична оси «Оу».

Определенного определения симметрии в алгебре нет. Однако с одной стороны это применение при графическом решении, когда корни уравнения «X»= « - X». С другой стороны это метод решения при помощи симметричных многочленов.

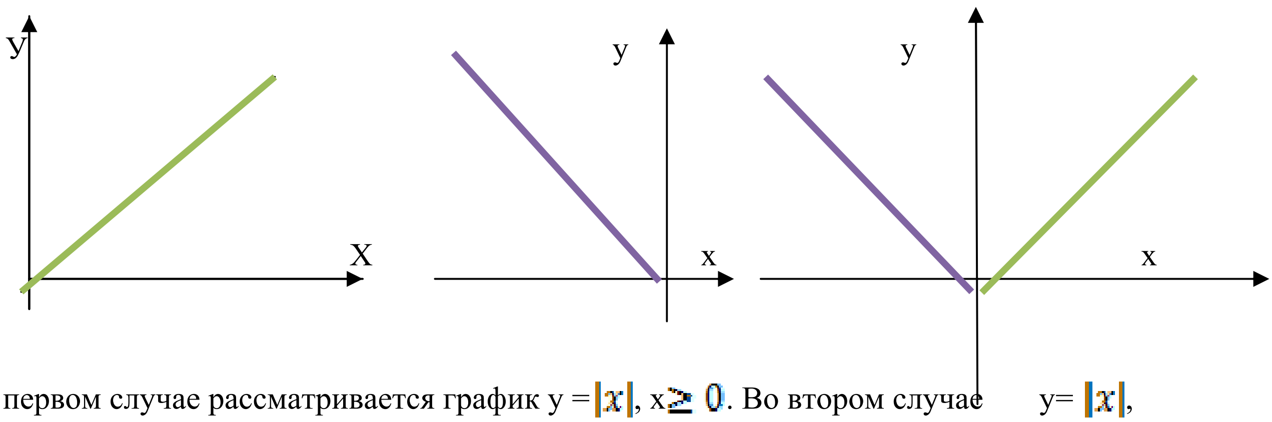
Также симметрия рассматривается в алгебраических функциях типа:

1) f(x)=$|x|$

Напомним, что **в алгебре через $|x|$ обозначают абсолютную величину, или модуль числа «X».**

Итак: $$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } "x \geq 0" \\ -x, \text{ если } "x \leq 0" \end{cases}$$

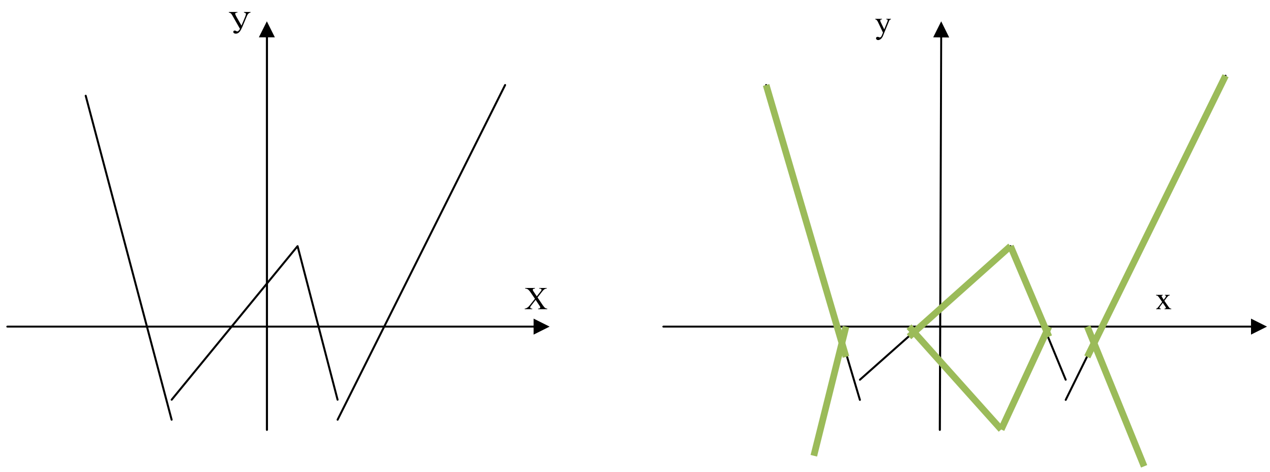
Начертим этот график:



В первом случае рассматривается график y = $|x|$, x≥ 0. Во втором случае y= $|x|$, x≤ 0. И третий случай - y = $|x|$, x$\in R$

2) x = $|y|$

При y≥ 0 график сохраняется, также отражается симметрично оси Ox.



На первом графике изображен график функции f(x)=y.На втором изображен график функции f(x) = $|y|$

Рассмотрим еще пару примеров симметрии при построении графиков:

Задание № 1.

Построить график функции: $|y| = x^2 - 4|x| + 3$

Для построения графика, мы приводим уравнение к виду:

$$|y| = |x|^2 - 4|x| + 3$$

$$|y| = f(|x|)$$

Для построения этого типа графика пользуемся свойствами симметрии. Т.е. строим график только при $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

И только после того как построим этот график , мы рисуем симметрии относительно оси «ОУ» и оси «ОХ», и совмещаем их.

Построим график:

Задание № 2.

Построить график заданной функции: $x^2 + y^2 - 2|x| + 4y + 1 \leq 0$

Для построения этого графика данное неравенство приводит к виду:

$$f(x,y) = |x^2| + y^2 - 2|x| + 4y + 1 \leq 0$$

$$(|x| - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 4$$

$f(|x|, y)$ обозначает, что необходимо использовать симметрия относительно оси «ОУ». Для построения этого графика необходимо построить лишь при условии, что Х≥ 0, а далее построить симметрию относительно оси «ОУ»

Построим график:

2.1 «Центр тяжести», метод симметризации

в этом разделе мы рассмотри симметрические уравнения. Итак определение:

симметрическое уравнение- это уравнение графическое решение которого содержит симметрию относительно оси «Оу» или «Ох» или начала координат.

Способ, позволяющий приводить уравнение четвертой степени к трехчленному виду,- симметризация. Для того чтобы решить подобный вид задач: "$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=k$" мы это уравнение приводим к биквадратному уравнению при помощи введении новой переменной «у»

$$y = x - \frac{a+b+c+d}{4} \leftrightarrow x = y + \frac{a+b+c+d}{4}$$

Т.е. при помощи новой переменой мы выражаем искомый член «х» и подставляем в первоначальное уравнение. Значение иногда называют «центром тяжести».

Задание № 1.

Решить уравнение: $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8) = 60$

Вводим новую переменную: $y = x - \frac{3+4+7+8}{4} = x = \frac{11}{2} + y$

После замены получилось: $\left(y-\frac{5}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{5}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right) = 60$

$$(y^2 - \frac{25}{4})\left(y^2 - \frac{9}{4}\right) = 60$$

$$x^2 - \frac{17x^2}{2} - \frac{735}{16} = 0$$

y=7/2; y=-7/2

после того как подставим значения «у» мы получим значения «х» x=2; x=9.

Задание № 2.

Решить уравнение $(6\text{-}x)^4 + (8\text{-}x)^4 = 16;$

Уравнение вида $(x-a)^4 + (x-b)^4 = A$, где $A > 0$, можно решить, также используя метод симметризации через «центр тяжести», т.е. делая замену

$y = x - \frac{a-b}{2}$

Т.е $y = x - \frac{6+8}{2}$ =x-7. Тогда x=y+7. Подставим в уравнение , получим $(1+y)^4 + (1-y)^4 = 16$.

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим $y^4 + 6y^2 - 7 = 0$.

Откуда найдем y=±1, а x=6 и x=8.

<u>Ответ: x=6 и x=8</u>

2.2 Возвратные уравнения – симметрические уравнения четвертой степени.

Симметрические многочлены можно с успехом применять и для решения некоторых уравнений высших степеней. В этом пункте мы рассмотрим так называемые возвратные уравнения и симметрические уравнения четвертой степени.

Возвратным уравнением называют уравнения, в которых коэффициенты равноудалены от середины и совпадают. Симметрические уравнения четвертой степени – это уравнения вида:
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + +bx + a = 0,$ где, $a \neq 0, c \in$ **R.** Например:

$z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 3z + 1$- перед нами возвратное уравнение пятой степени.

$x^4 - 3x^3 + 11x^2 + 3x + 1$- а это возвратное уравнение четвертой степени.

Рассмотрим уравнения четвертой степени: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

Так как x=0 – не корень данного уравнения то разделим обе части на x^2 получим уравнение, равносильное исходному:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \text{ или } a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2$-2

Теперь имеем квадратное уравнение: $a(t^2 - 2) + bt + c = 0$

Если оно имеет корни t_1, t_2 то получим совокупность

$$x + \frac{1}{x} = t_1 \qquad x + \frac{1}{x} = t_2$$

решая которую, найдем корни данного уравнения.

Например:

Задание № 1.

Уравнение:$2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$

$$x(2(x^2+\frac{1}{x^2})+x+\frac{1}{x}-11)$$

замена: $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2$-2 $\quad$ x * $\frac{1}{x}$= t

$$x((2t^2-2)+t-11)=0$$

$$2t^2+t-15=0$$

x + $\frac{1}{x}$=3 $\quad$ x + $\frac{1}{x}$= -2.5

Ответ: x=2; x=0.5; x=$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; x=$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Возвратные уравнения можно решить с помощью симметрических многочленов. В этом случае $z+\frac{1}{z}=O_1$ - это один многочлен, 1= O_2 - это второй многочлен.

$$z^2+\frac{1}{z^2}-O^5-2$$
$$z^3+\frac{1}{z^3}=O^3-3O$$
$$z^4+\frac{1}{z^4}=O^4-4O^2+2$$
$$z^5+\frac{1}{z^5}=O^5-5O^3+5O$$

Задание № 2.

Решим возвратное уравнение:

$$4z^{10}-21z^8+17z^6+17z^4-21z^2+4=0$$

$$z^5(4z^5-21z^3+17z+17\frac{1}{z}-21\frac{1}{z^3}+4\frac{1}{z^5}=$$

$$z^5\left(4\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)-21\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+17\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)=0$$

$$z^5(4o^5-41o^3+100\,o)=0$$

Так как $z=0$ не является корнем исходного уравнения, то мы приходим к следующему уравнению относительно O:

$$o(4o^4-41o^2+100)=0$$

Делаем замену: «t»= o^2 *следует, что мы решаем квадратное уравнение.*

$t_1=4$ $\qquad$ $t_2=\frac{25}{4}$

В результате мы находим пять значений для o: o=2; $o - -2$; $o - \frac{5}{2}$; $o - -\frac{5}{2}$;

Это означает, что для нахождения корней первоначального уравнения мы имеет пять уравнений (т.к. o =z+1/z) , решая которые мы находим корни: z = -1; z = -2; z = 2; z = 1; z = ½; z= -½;

Ответ: z = -1; z = -2; z = 2; z = 1; z = ½; z= -½;

2.3 Метод симметричных многочленов в системах с двумя неизвестными.

что общего у этих двух систем?

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + y + xy = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8(y^3 + x^3) = 65 \\ 2(x + y) = 5xy \end{cases}$$

Все эти системы имеют одно общее свойство — левые части уравнений являются многочленами, в которые «*x*» и «*y*» входят одинаковым образом. Именно для таких систем уравнений и применимы излагаемые далее методы решения.
Многочлены, в которые «*x*» и «*y*» входят одинаковым образом, называют симметрическими. Точнее говоря:

Определение:

Многочлен от «*x*» и «*y*» называют *симметрическим*, если он не изменяется при замене «*x*» на «*y*», а «*y*» на «*x*». Симметрические многочлены «*x* + *y*» и «*xy*» являются самыми простыми. Их называют *элементарными симметрическими многочленами* от «*x*» и «*y*». Для них используют специальные обозначения:

$$O_1 = x + y \qquad O_2 = xy$$

Кроме "O_1" и "O_2" , нам часто будут встречаться так называемые *степенные суммы*, т. е. многочлены "$y^n + x^n$"
Принято обозначать многочлен таким образом:

$$x^n + y^n = S_n$$

Рассмотрев симметрические многочлены, возникает вопрос, является ли этот прием построения симметрических многочленов общим, т. е. можно ли с его помощью получить любой симметрический многочлен?
Рассмотрение примеров делает это предположение вероятным. Например, степенные суммы S_1, S_2, S_3, S_1 без труда выражаются через O_1 и O_2:

$$S_1 = O_1$$

$$S_2 = O_1^2 - 2O_2$$

$$S_3 = O_1(O_1^2 - 3O_2)$$

$$S_4 = (O_1^2 - 2O_2)^2 - 2O_2^2$$

Разбор дальнейших примеров дает тот же результат, какой бы симметрический многочлен мы ни взяли, после более или менее сложных
выкладок его удается выразить через элементарные симметрические многочлены O_1 и O_2. Таким образом, примеры приводят нас к предположению о справедливости следующей теоремы:

Теорема: Любой симметрический многочлен от «x» и «y» можно представить в виде многочлена от "$O_1 = x + y$" и "$O_2 = xy$", каждую степенную сумму "$x^n + y^n = S_n$" можно представить в виде многочлена от "O_1" и "O_2".

Для того, чтобы доказать это утверждение мы умножаем обе части уравнения $S_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$ на "O_2".

$$O_1 S_{k-1} = (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = x^k + xy^{k-1} + yx^{k-1} + x^k =$$

$$= S_k + O_2 S_{k-2}$$

Тогда отсюда следует, что: $S_k - O_1 S_{k-1} - O_2 S_{k-2}$

С помощью этой формулы мы можем вывести любой многочлен и степенную сумму.

2.4 Решение систем с двумя переменными при помощи симметрических многочленов.

Задание № 1.

Рассмотрим пример: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Введем замены: "$O_1 = x + y$" и "$O_2 = xy$" и, пользуясь формулой $S_k - O_1 S_{k-1} - O_2 S_{k-2}$, мы переписываем нашу систему.

У нас получается: $\begin{cases} O_1^3 - 3O_1O_2 = 8 \\ O_1^2 - 2O_2 = 4 \end{cases}$

Находя из второго уравнения значение O_2 и подставляя его в первое уравнение и умножая на -2, мы получаем следующее уравнение относительно неизвестного O_1:

$$O_1^3 - 12O_1 + 16 = 0$$

Для нахождения значений o_1 можно было бы воспользоваться общей формулой решения уравнений третьей степени, но в данном случае
проще воспользоваться теоремой Безу.

$o_1 - 2$

$$O_1^3 - 12O_1 + 16 = (o_1 - 2)(o_1^2 + 2o_1 - 8)$$

Решив квадратное уравнение, в итоге мы нашли 2 корня

$O_1 = 2$

$O_1 = -4$

Зная зависимость $O_1^2 - 2O_2 = 4$, мы находим O_2 и решаем системы

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

Итак, рассмотрев эту систему, мы полностью убедились, что метод симметрических многочленов - самый рациональный способ решения подобных видов задач. Если бы не этот способ нам бы пришлось иметь дело с иррациональной системой: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x = \sqrt{4 - y^2} \end{cases}$, где возможно мы бы ошиблись.

Задание № 2.

Решить уравнение *sinx+cosx=1*. Несмотря на то, что можно привести достаточно много (не менее 12) различных способов решения этого уравнения, есть возможность использования симметрии, сведя это тригонометрическое уравнение с помощью замены *a=sinx; b=cosx* к системе симметрических алгебраических уравнений: $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$

2.5 Тождества и задания на упрощения.

Делая замены и зная как расписываются степенные суммы, мы можем решать уравнения с тремя неизвестными, не проводя их иррациональному виду. Однако, не только решать системы, но и упрощать выражения (раскладывать на множители) нам помогает метод симметрических многочленов. Например:

Задание № 1.

$$x^3 + z^3 + y^3 - 3xzy - S_3 - 3O_3 - \left(O_1{}^3 - 3O_1O_2 + 3O_3\right) - 3O_3 -$$

$$= O_1^3 - 3O_1O_2 = O_1(O_1^2 - 3O_2) = (z + x + y)(z^2 + x^2 + y^2 - xz - xy - zy)$$

В целом ряде задач на доказательство тождеств также с успехом могут быть применены элементарные симметрические многочлены. Рассмотрим пример:

Задание № 2.

Доказать, что если «X+Y+Z=0», то : $x^4 + z^4 + y^4 = 2(xz + xy + zy)^2$

Решить эту задачу очень легко, необходимо расписать "$x^4 + z^4 + y^4$" по формуле степенной сумме. И после мы получим необходимый нам результат, т.к. «X+Y+Z=0».

$$x^4 + z^4 + y^4 = o_1^4 - 4o_1^2 o_2 + o_2^2 + 4o_1 o_3$$

Следует: $x^4 + z^4 + y^4 = o_2^2$

$$x^4 + z^4 + y^4 = 2(xz + xy + zy)^2$$

Тождество доказано.

6. Использование симметрии при решении задач с параметром.

В задачах, которые мы рассмотрим ниже, обязательно фигурирует аналитическое выражение, геометрический образ которого имеет или ось симметрии, или плоскость симметрии. Во всех задачах в той или иной форме присутствует требование единственности решения. Если описываемые аналитические выражения конструируют уравнения и координаты точки M являются его решением, то обязательно найдется еще одна точка N, симметричная точке M, координаты которой так же будут являться решением. Следовательно, для выполнения требования единственности решения необходимо, чтобы точки M и N совпадали, т.е. M лежало на оси симметрии. Высказанные соображения и составляют основу одного из приемов поиска необходимых условий, о котором будет идти речь в настоящем

Задание № 1.

Найти все a , при которых система $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 1 - |x| \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

имеет единственное решение

Легко заметить, что если (x_0 ; y_0)— решение системы, то (-x_0 ; y_0) также является ее решением. Поэтому условие «x» = 0 — необходимое для существования единственного решения. Важно понимать, что оно не является достаточным: наша система может иметь несколько решений вида (0 ; y_0) и, более того, вообще не иметь решений. Положим x = 0.

Тогда: $\begin{cases} a = y + 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

Отсюда, a = 0 или a = 2. Итак, искомые значения параметра следует выбирать в множестве {0:2}. При a = 0 получаем: $\begin{cases} y + 1 - |x| - 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Отсюда получаем: $\begin{cases} x + 1 = |x| \\ y(y + 1) = 0 \end{cases}$

Эта система имеет три решения (1; 0), (- 1 ; 0), (0 ; - 1). Следовательно, значение а = 0 придется исключить. При а=2 получается:

$$\begin{cases} 2x^4 + |x| = y - 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения имеем у $\geq$ 1(т.к. $2x^4 + |x| \geq 0$). В то же время второе уравнение позволяет сделать вывод, что у $\leq$ 1. Следовательно, у = 1, а значит, х=0. Проверка показывает, что пара (0 ; 1) — решение, а в силу ограничения для переменной у(у > 1 и у < 1) оно единственное.

Ответ: при а=2.

Рассмотрим еще один пример использования симметрии и аналитических выражений:

Задание № 2.

При каких «а» система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} y \geq (x + y)^2 - x - 2y + a \\ x \geq (y - x)^2 - 3y + x + a \end{cases}$$

После упрощения: $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - x - 3y + a \leq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 3y + x + a \leq 0 \end{cases}$

Теперь становится очевидным, что х = О — необходимое условие единственности решения системы. Если х= 0, то получаем:

$$2y \geq y^2 - y + a \quad ; \quad y^2 - 3y + a \leq 0$$

Это неравенство имеет единственное решение, если дискриминант соответственного квадратного трехчлена равен нулю, т.е. 9-4а=0

$\frac{9}{4} - a$

Проверка показывает, что при а = $\frac{9}{4}$ система имеет единственное решение

$(0;\frac{3}{2})$

Ответ: при а = $\frac{9}{4}$

Рассмотрим еще пару примеров:

Задание №3.

При каких «а» уравнение имеет единственное решение:

$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$

Пусть, $"x_0" - \text{корень, тогда } "-x_0"$-корень. Для того чтобы было единственное решение , нужно, чтобы $x_0 = 0$

$$-2a\sin(\cos 0) + a^2 = 0$$

$$-2a\sin 1 + a^2 = 0$$

Получается, что: а=0 и а =$2a\sin 1$; проверим , действительно ли при этих а решение единственно. Для этого подставим а в наше уравнение.

При «а = о» $x^2 = 0$- единственное решение.

При «а =$2\sin 1$» следует:

$x^2 - 4\sin 1 \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0$

$x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \sin(\cos x)$

Так как $"x^2 + 4\sin^2 1 \geq 4\sin^2 1"$ и $"4\sin 1 \sin(\cos x) \leq 4\sin^2 1$

из этого условия следует, что равенство возможно только если обе части равны 4, а это выполнено только при «х=0» . Т.е. при

а =$2\sin 1$ решение единственно.

Ответ: при а =0 и при а =$2\sin 1$

Задание №4.

$$2\pi^2(x - 1) + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$

Замена: t=$2\pi(x - 1)$; $\cos(2\pi x) = \cos(2\pi(x - 1))$

Умножим первоначальное уравнение на 2

$$t^2 + 8a\cos t - 18a^3 = 0$$

Из этого выражения следует что $"t_0" - \text{корень}$ и $"-t_0"$-корень

t=0 следует что: $8a = 18a^3$ следует: $\begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ a = \frac{2}{3} \\ a = 0 \end{cases}$

проверка:

1) **при** "$a=0$" $t=0$ следует $x=1$
2) при "$a=-\frac{2}{3}$" следует $t^2-\frac{16}{3}\cos t+\frac{16}{3}=0$; $t^2=\frac{16}{3}(-1+\cos t)$, так как "$t^2\geq 0$" и "$\frac{16}{3}(-1+\cos t)$" ≤ 0 следует $t=0$, следует $x=1$
3) при "$a=\frac{2}{3}$"**следует** $t^2=\frac{16}{3}(1-\cos t)$ Аналитически решить это уравнение мне не удалось(смог найти только решение $t=0$) – поэтому попытаюсь *построить графики функций.*

   $y=t^2$ *и* $y=\frac{16}{3}(1-\cos t)$ *и по ним определить, сколько решений имеет это уравнение*

Для того чтобы определить в двух ли точках пересекутся графики или нет, мы берем точку «$\frac{\pi}{6}$» и подставим в функцию, получается:

«$\frac{\pi^2}{36}<\frac{16}{3}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$» Получается, что в точке $\frac{\pi}{6}$ график $y=t^2$ находится ниже графика $y=\frac{16}{3}(1-\cos t)$,*но парабола потом уходит бесконечно наверх, в товремя как множество значений функции* $y=\frac{16}{3}(1-\cos t)$ *всего лишь* $\left[0;\frac{16}{3}\right]$

т.е. графики пересекутся как минимум 2-х точках, что уже не удовлетворяет решению задачи

Ответ: при а=0; при а $=-\frac{2}{3}$

Заключение

Итак, можно точно сказать что симметрия встречается не только в геометрии, природе и искусстве, но и в ряде задач алгебры. Т.е это гораздо более широкое понятие, чем раньше я себе его представлял. И знание свойств симметрии позволяет существенно облегчить решение многих задач, в которых эта симметрия встречается – начиная от построения графиков функций и заканчивая задачами с параметрами.

Давно известно, что решение многих задач из курса алгебры и начал анализа значительно облегчается, становится “прозрачным” и красивым, если заметить и использовать определенные особенности, например, симметричность условия задачи, применяемых математических моделей, четность или нечетность функций, разного рода сходство математических объектов.

Чаще всего симметрия в широком смысле этого слова имеет место в задачах на решение систем уравнений и неравенств, иррациональных уравнений, неравенств, тригонометрических уравнений и неравенств и их систем, в некоторых графических задачах, не говоря уже о специальных задачах геометрии. Так, например, многие из задач алгебры решаются единообразным методом, использующим замену переменных и основанным на теории симметрических многочленов.

Работа над этим проектом дала мне не только неоценимые знания о симметрии в алгебре , и показала мне не просто новый метод решения задач, а приоткрыла завесу над прекрасной стороной математики, где ученик в полной мере сможет удовлетворить потребность своего логического мышления в анализе, поиске ассоциаций, классификации понятий и синтезе различных идей.

Список литературы:

1. Болтянский В.Г. и др. Симметрия в алгебре. - М.: Наука, 1967.
2. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. - М.: Наука, 1971.
3. Березин В.Н. и др. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике. Книга для учителя. - М.: Просвещение, 1985.
4. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике. Алгебра. - М.: Наука, 1987.
5. Черкасов О.Ю. и др. Математика: Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. - М.: АСТ-Пресс, 2001.