1.3.6. (2010) В треугольнике *ABC* угол *A* равен α, сторона *BC* равна *a*, *P*— точка пересечения биссектрис. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BPC*.

1.3.7. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 18, длина биссектрисы AE равна $4\sqrt{15}$, а длина отрезка EC равна 5. Определите периметр треугольника ABC.

1.3.8. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что AD = 10, $\angle BDC = \angle BAL = 60°$. Найдите площадь треугольника ABC.

1.3.9. В равнобедренном треугольнике ABC, в котором AB = BC = 10, AC = 16, найти расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис.

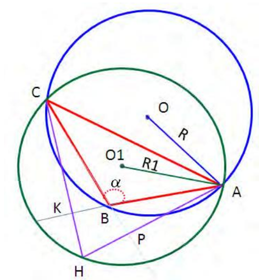
1.3.10. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что угол между биссектрисой, проведенной к основанию, и биссектрисой, проведенной к боковой стороне, равен углу при вершине.

1.3.11. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AD* и *CE*. Найдите длину отрезка *DE*, если *AC* = 6, *AE* = 2, *CD* = 3.

1.3.12. В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH. Известно, что $\frac{MK}{KL} = \frac{1}{2}$, $\frac{PH}{MH} = \frac{3}{2}$ а площадь треугольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM.

1.4. Высоты треугольника

1. *Точка пересечения высот треугольника называется – ортоцентром.*
2. *Если H – ортоцентр треугольника, то точки A, B и C – точки пересечения высот треугольников ABH, BCH, ACH.*
3. *Если H – ортоцентр треугольника, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, ABH, BCH, ACH, равны между собой.*
4. *Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот).*



Доказательство п.3:

1)Пусть O – центр окружности, описанной около ΔABC, а R – радиус описанной около треугольника ΔABC окружности.

По теореме синусов $2R = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AC}{\sin\alpha}$, $R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$.

2)H – точка пересечения высот ΔABC, O_1 – центр окружности, описанной около ΔAHC, а R_1 – радиус описанной около этого треугольника окружности. Тогда $2R_1 = \frac{AC}{\sin\angle H}$;

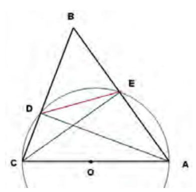
3)В четырёхугольнике HKBP $\angle K = \angle P = 90°$,

тогда $\angle H + \angle PBK = 180°$, $\angle H = 180° - \angle PBK = 180° - \alpha$

$2R_1 = \frac{AC}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{AC}{\sin\alpha}$, $R_1 = \frac{AC}{2\sin\alpha}$.

Получили, что $R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = R_1$.

ОПОРНАЯ ЗАДАЧА № 1



D и E основания высот AD и CE ΔACB.

Доказать, что ΔABC ~ Δ DEB

Доказательство

1 способ: $\angle B$ – острый. Так как точки D и E – основания высот, то ΔACD и ΔACE **-** можно вписать в окружность с диаметром AC.

$\angle DAC = \angle DEC$ – как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу CD.

$\angle DCA = 90° - \angle DAC$; $\angle DEB = 90° - \angle DEC \Rightarrow$ **∠DCA = ∠DEB** и ∠ **BDE = ∠BAC** ⇒ ΔABC ~ Δ DEB по двум углам.

2 способ: ΔABE и Δ ADB - прямоугольные, $\cos\angle B = \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$. Тогда по углу B и двум пропорциональным сторонам *ΔABC ~ Δ DEB*

1.4.1.Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.

1.4.2. (2010) Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Известно, что *CH* = *AB*. Найдите угол *ACB*.

1.4.3. Точки A_1, B_1, и C_1 – основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60°, 30°. Найдите углы треугольника ABC.

1.4.4. Точки D и E – основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и C соответственно. Известно, что $\frac{DE}{AC} = \kappa$, BC = *a* и AB = *b*. Найдите сторону AC.

1.4.5. (2010) В треугольнике *ABC* угол *A* равен α, сторона *BC* равна *a*, *H* — точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BHC*.

1.4.6. (Свойство высот, подобие треугольников) В равнобедренном треугольнике ABC со сторонами AB = BC = 4 и AC = 2 проведены высоты AA1 и BB1. прямая A1B1 пересекает прямую AB в точке K. Найдите длину AK.

1.4.7. (Опорная задача, свойство высот) В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

1.4.8. В остроугольном треугольнике PQR, сторона PR которого равна 12, на стороны QR и PQ опущены высоты PM и RN. Вычислить площадь четырехугольника PNMR, если известно, что площадь треугольника NQM равна 2, а радиус окружности, описанный около треугольника PQR равен $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

1.4.9. Отрезок H_1H_2, соединяющий основания H_1 и H_2 высот AH_1 и BH_2 треугольника ABC, виден из середины M стороны AB под прямым углом. Найдите угол C треугольника ABC.

1.4.10. AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC . Угол A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равен 36^0, а угол B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равен 84^0 . Найдите угол C треугольника ABC .

1.4.11. (ТВ№28-2013, А. Ларин.) Найти длины сторон AB и AC треугольника ABC, если BC = 8, а длины высот, проведенных к AC и BC, равны соответственно 6,4 и 4.