

Задачи с использованием касательных.

Задачи с квадратным трехчленом.

1. Найдите все значения параметра a , при которых прямая $y = 2x + a$ имеет с параболой $y = x^2 - 3$ единственную общую точку. Сделать чертеж.
2. Найдите все значения параметра a , при которых прямая $y = ax + 6$ имеет с гиперболой $y = \frac{x-2}{x+3}$ единственную общую точку. Сделать чертеж.
3. Найдите уравнения всех прямых, не параллельных оси OY , проходящих через начало координат и имеющих с параболой $y = x^2 - 4x + 4$ единственную общую точку. Сделать чертеж.
4. Найдите уравнения всех прямых, имеющих с каждой из парабол $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x - 5$ только одну общую точку. Сделать чертеж.

Домашнее задание.

1. Найдите все значения параметра a , при которых прямая $y = a - x$ имеет с гиперболой $y = \frac{1}{x}$ единственную общую точку.
2. Через какую точку оси ординат проходит прямая, параллельная прямой $y = 3x$ и имеющая с параболой $y = -x^2 - 7x$ единственную общую точку.
3. Через точку $(2,0)$ проведена прямая, пересекающая ось ординат и имеющая с гиперболой $y = -\frac{1}{x}$ одну общую точку. Найти координаты этой точки.
4. Найдите уравнения всех прямых, имеющих с каждой из парабол $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2 - 4x + 9$ только одну общую точку.

Расположение корней квадратного трехчлена.

1. При каких a оба корня уравнения $(2-a)x^2 - 2ax + 3a = 0$ положительны?
2. При каких a один из корней уравнения $(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$ больше 1, а другой меньше 1?
3. При каких a оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ лежат на интервале $(0;3)$?
4. При каких a неравенство $x^2 + ax + a^2 + 6a < 0$ выполняется при всех $x \in (1;2)$?
5. При каких a неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполнено для всех положительных x ?
6. При каких a неравенство $(a-1)x^2 + (2a-3)x + (a-3) > 0$ выполнено хотя бы при одном $x < 1$?

Задачи, сводящиеся к использованию квадратного трехчлена.

1. При каких p уравнение $\sin^2 x + p \sin x = p^2 - 1$ имеет решения?
2. Найти все a , при которых уравнение имеет одно решение $\sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$.
3. Найти все значения a , при которых уравнение $1 + \sin x(3 \sin x + a \cos x) = 0$ не имеет решений.

Использование множества значений функций.

1. Найти все значения параметра, для которых при каждом значении выражения не равно значению выражения.
2. При каких $m \in (-1; 1)$ уравнение $4^{\sin x} + m \cdot 2^{\sin x} + m^2 - 1 = 0$ имеет решения?
3. Найти все значения параметра, при которых уравнение имеет решения.
4. Существуют ли такие a , что неравенство $4^{|\cos x|} + 2(2a + 1) \cdot 2^{|\cos x|} + 4a^2 - 3 < 0$ выполнено при всех x ?
5. При каких a неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cdot \cos x \geq 0$ выполнено при всех x ?
6. При каких a уравнение $(1 + a) \left(\frac{x^2}{1 + x^2} \right)^2 - 3a \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} + 4a = 0$ имеет корни?
7. Найти все a , при которых уравнение имеет решения $\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}} \right)^2 + 2a \cdot \frac{1+x}{\sqrt{x}} + 1 = 0$.
8. Найти все значения параметра, при которых уравнение имеет решение.

СЗ. Найдите все значения x , которые удовлетворяют неравенству $(3a^2 - 1)x^2 - 4a < 11ax - 4$ при любом значении параметра a , принадлежащем промежутку $[0; 1)$.

СЗ. Найдите все значения x , которые удовлетворяют неравенству $(a + 2)x^2 < 3ax + 18$ при любом значении параметра a , принадлежащем интервалу $(-1; 0)$.

СЗ. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$ значение выражения $8^{2x} + 5 \cdot 8^x$ не равно значению выражения $a \cdot 8^x + 6$.

СЗ. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $x \in [-\sqrt{5}; -2)$ значение выражения $x^4 + 4x^2 - 10$ не равно значению выражения $(a + 3) \cdot x^2$.

СЗ. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $x \in \left[\frac{1}{3}; 27 \right)$ значение выражения $6 - \log_3^2 x$ не равно значению выражения $(a - 2) \cdot \log_3 x$.

СЗ. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $x \in [0, 25; 8)$ значение выражения $\log_2^2 x + 2 \log_2 x$ не равно значению выражения $a \cdot \log_2 x + 18$.

III.144. (МИРЭИА). Найти все значения параметра a , для

которых неравенство

$$\begin{aligned} & \sin^5 x + \cos^5 x - a(\sin x + \cos x) \geq \\ & \geq \frac{a^2 - 11}{2} (\sin x + \cos x) \sin x \cos x \end{aligned}$$

выполняется при всех $x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$.

III.149. (МГУ). При каких значениях параметра a неравенство $4^{\cos x} - 2(a - 3) \cdot 2^{\cos x} + a + 3 > 0$ выполняется при всех действительных x ?

III.150. (КПИ). Для каких значений параметра m неравенство $(m + 2)4^{|x-1|} - 2m2^{|x-1|} + 3m + 1 > 0$ выполняется при всех действительных x ?

III.137.(НГУ). При каких действительных значениях параметра β уравнение $2(\beta^2 + 1)\cos^2 x + 4\beta^2 \cos x + 1 = 0$ не имеет решений?

III.138.(НГУ). При каких действительных значениях параметра α уравнение $(\alpha^2 + 1)\sin^2 x + 2\alpha^2 \sin x + \frac{1}{2} = 0$ имеет хотя бы одно решение?

III.141.(МГУ). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a \cos x > 2$ выполняется для любого значения x .

III.142.(МГУ). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\cos^2 x + 2a \sin x - 2a < a^2 - 4$ выполняется для любого значения x .

III.143.(МГУ). Найдите a , при которых неравенство $(a - 1)\sin^2 x + 2(a - 2)\sin x + a + 3 < 0$ не имеет решений.

III.146. Найдите a , при которых корни уравнения $(a - 1)\log_3^2(x - 2) - 2(a + 1)\log_3(x - 2) + a - 3 = 0$ меньше 3.

Задачи из ЕГЭ прошлых лет на использование квадратного трехчлена.

1. Найдите все значения a , при которых уравнение $\log_a(\sin x + 2) + \log_a(\sin x + 3) = 1$ имеет решения.
2. Найдите все значения a , при которых уравнение $\log_a(2^x - 1) + \log_a(2^x - 7) = 1$ имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра a , при которых сумма и равна 1 хотя бы при одном значении переменной.

4. При каких a значение выражения $(\sin x)^{\lg(\sin x) - a^2}$ больше значения выражения $10^{\log_{100}(1 - \cos^2 x) + \log_7 a}$ при всех допустимых значениях x .

5. Найдите все значения a , при которых неравенство выполняется при всех x из области допустимых значений:
 $(\cos x)^{\log_3(\cos x) - |a|} > 3^{\log_9(1 - \sin^2 x) + a(a - 2)}$

6. При каких a значение выражения $(1 - x^2)^{\log_5(1 - x^2) - a^4}$ больше значения выражения $0,25^{1 - |a| - \log_2 \sqrt{1 - x^2}}$ при всех допустимых значениях x .

7. При каких значениях параметра неравенство верно при всех значениях переменной:

8. При каких значениях параметра неравенство _____ верно при всех x .

«Задачи с параметрами» (практикум).

1. При каких значениях параметра a графики функций $y = 2x - a$ и $y = (a + 1)x^2 + 1$ пересекаются в одной точке?
2. При каких значениях параметра c уравнение $x^2 - (3c - 2)|x| + 2c^2 - c = 0$ имеет 4 различных корня?
3. При каких значениях параметра b уравнение $x^2 - (2a + 5)|x| - \frac{a^2}{4} + \frac{5}{4} = 0$ имеет 2 различных корня?
4. При каких значениях параметра a уравнение $a(x + 2) + \sqrt{6 - 10x} = 0$ имеет решения на отрезке $[-3; 1]$?
5. При каких значениях параметра p уравнение $p \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{-x} = 1$ имеет единственное решение?
6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\log_{0,2} \left(\left(\frac{1}{5} \right)^x + 4a \right) = x$ имеет два различных корня.
7. При каких значениях параметра a все корни уравнения $(a - 1)\log_3^2(x - 2) + 2(a + 1)\log_3(x - 2) + a - 3 = 0$ меньше 3?
8. При каких значениях параметра a уравнение $\lg(x^2 + 2ax) = \lg(8x - 6a - 3)$ имеет единственное решение?
9. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{x^2-1}(x+a) = 1$ не имеет решений?

Домашнее задание «Задачи с параметрами».

1. При каких значениях параметра a графики функций $y = 2ax + 1$ и $y = (a + 6)x^2 + 4$ не пересекаются?
2. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - (3a - 1)|x| + 2a^2 - a = 0$ имеет 4 различных корня?
3. При каких значениях параметра b уравнение $x^2 - (4b - 2)|x| + 2b^2 - 2b = 0$ имеет 2 различных корня?
4. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $x^4 - 2(a - 1)x^2 + a^2 - 1 = 0$ не имеет корней.
5. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $x^4 - 4ax^2 + a^2 - 4 = 0$ имеет 4 различных корня.
6. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{2ax - 1} = x - 1$ имеет 2 различных решения?
7. При каких значениях параметра a уравнение $ax + \sqrt{10 - 6x} = 0$ имеет решения на отрезке $[-1; 1]$?
8. При каких значениях параметра p уравнение $p \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ имеет единственное решение?
9. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет два различных корня.
10. При каких значениях параметра a уравнение $(a - 1) \cdot 3^{2x} - (2a - 1) \cdot 3^x - 1 = 0$ имеет два различных решения?
11. При каких значениях параметра a уравнение $\lg(x^2 + ax) = \lg(4x - a - 4)$ имеет единственное решение?
12. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{2x}(x + a) = 1$ не имеет решений?

Задачи с параметрами. Исправление.

1. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 2(a-1)x + a^2 - 8a + 9 = 0$ имеет два различных корня, меньших 1?
2. Найти множество значений параметра p , при которых корни квадратного уравнения $x^2 - (2p+7)x + p^2 + 7p + 6 = 0$ лежат по разные стороны интервала $(2; 3)$.
3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - (5a-9)|x| + 4a^2 - 9a = 0$ имеет 2 различных корня?
4. При каких значениях параметра a уравнение $4^x + 2(a-2) \cdot 2^x - 3a^2 + 8a - 5 = 0$ имеет два различных решения?
5. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+2} = x - a$ имеет единственное решение?
6. При каких значениях параметра a уравнение $\cos 2x + \sin^4 x - a^2 + 2a - 1 = 0$ имеет хотя бы одно решение?
7. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - 3(a-5) \cdot 2^x + 2a^2 - 22a + 56 = 0$ имеет одно решение, принадлежащее отрезку $[1; 2]$?
8. Найти все значения b , при которых уравнение $\log_{b+8}(2bx + 10x) = \log_{b+8}(x^2 + 6)$ не имеет решения.