

ГЛАВА 2. БИНОМ НЬЮТОНА

2.1. Свойства сочетаний. Бином Ньютона.

Предполагая, что n и k - целые положительные числа и $0!=1$, сформулируем основные свойства сочетаний.

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

2. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Доказательство: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \Rightarrow C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$. Что и

требовалось доказать.

3. $C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m$.

Доказательство:

$$C_n^{m+1} + C_n^m = \frac{n!}{(n-m-1)!(m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!(n-m+m+1)}{(n-m-1)!m!(m+1) \cdot (n-m)} = \frac{(n+1)!}{(n-m)!(m+1)!} = C_{n+1}^{m+1}$$

. Что и требовалось доказать.

4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Свойство №3 позволяет описать процедуру последовательного получения числа сочетаний при различных значениях n и m . Используя это свойство, можно представить число сочетаний в виде так называемого треугольника Паскаля.

$$C_2^1 = C_1^1 + C_1^0 = 2.$$

$$C_3^1 = C_2^1 + C_2^0 = 2+1=3; \quad C_3^2 = C_2^2 + C_2^1 = 1+2=3;$$

$$C_4^1 = C_3^1 + C_3^0 = 3+1=4; \quad C_4^2 = C_3^2 + C_3^1 = 3+3=6; \quad C_4^3 = C_3^3 + C_3^2 = 3+1=4;$$

Тогда треугольник Паскаля имеет вид

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\ 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1 \\ \dots \end{array}$$

Треугольник Паскаля обладает таким свойством, что каждый элемент строки, кроме крайних, равен сумме двух элементов, стоящих над ним в предыдущей строке. В начале и в конце каждой строки стоят единицы.

Треугольник Паскаля, записанный с помощью чисел сочетаний, выглядит так:

$$\begin{array}{cccc} & & C_0^0 & \\ & & C_1^0 & C_1^1 \\ & & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\ & & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\ \dots & & & & & \end{array}$$

Определение: Биномом Ньютона называют разложение вида:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + C_n^n a^0 b^n =$$

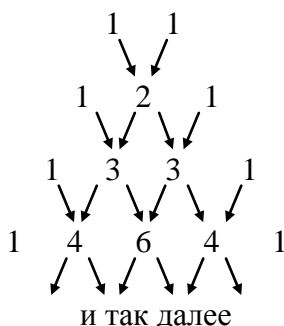
$$= a^n + na^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n!}{(n-m)! m!} a^{n-m}b^m + \dots + b^n, \text{ где } m < n$$

Но, строго говоря, всю формулу нельзя назвать биномом, так как «бином» переводится как «двучлен». Кроме того, формула разложения была известна еще до Ньютона, Исаак Ньютон распространил это разложение на случай $n < 0$ и n – дробного.

Цель изучения бинома Ньютона – упрощение вычислительных действий.

Компоненты формулы «бином Ньютона»:

- ✓ правая часть формулы – разложение бинома;
- ✓ $C_n^0; C_n^1; \dots; C_n^n$ – биномиальные коэффициенты, их можно получить с помощью **треугольника Паскаля**



✓ общий член и так далее разложения бинома n-й степени:

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n,$$

где T – член разложения; $(m+1)$ – порядковый номер члена разложения.

Практическая значимость треугольника Паскаля заключается в том, что с его помощью можно запросто восстанавливать по памяти не только известные формулы квадратов суммы и разности, но и формулы куба суммы (разности), четвертой степени и выше.

Например, четвертая строчка треугольника как раз наглядно демонстрирует биномиальные коэффициенты для бинома четвертой степени:

$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 b + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot a b^3 + 1 \cdot b^4$$

Альтернатива треугольнику Паскаля:

- 1) перемножить почленно четыре скобки:

$$(a+b)^4 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = a^4 + \dots;$$

- 2) вспомнить разложение бинома Ньютона четвертой степени:

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a^1 b^3 + 1$$

Историческая справка. В 13 в.н.э. начался расцвет арабской науки. Решая вопрос об извлечении корней любой степени, арабские алгебраисты пришли к формуле для степени суммы двух чисел, известной под исторически неверным названием «бином Ньютона». По видимому эту формулу знал, живший в 11-12 вв. н.э. поэт и математик Омар Хайям. Судя по некоторым источникам, восходящим к арабским оригиналам, для отыскания коэффициентов этой формулы брали число 10001 и возводили его во 2-ю, 3-ю, ..., 9-ю степени. Получалась таблица

100090036008401260126008400360009001

100080028005600700056002800080001

10007002100350035002100070001
 1000600150020001500060001
 10005001001000050001
 10004000600040001
 1000300030001
 100020001
 10001

В которой жирным шрифтом выделены коэффициенты бинома Ньютона. Если опустить в этой таблице излишние нули, то получится треугольная таблица, состоящая из биномиальных коэффициентов.

$(a + b)^0 =$	1	0								
$(a + b)^1 =$	a + b	1			1					
$(a + b)^2 =$	a ² + 2 a b + b ²	2			1	2	1			
$(a + b)^3 =$	a ³ + 3 a ² b + 3 a b ² + b ³	3			1	3	3		1	
$(a + b)^4 =$	a ⁴ + 4 a ³ b + 6 a ² b ² + 4 a b ³ + b ⁴	4			1	4	6	4		1
$(a + b)^5 =$...	5	1	5	10	10		5	1	
$(a + b)^6 =$...	6	1	6	15	20		15	6	1

Арабские ученые знали и основное свойство этой таблицы, которое выражалось формулами $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Интересовались сочетаниями и в Индии. Еще во 2 в. до н.э. индийцы знали числа C_n^k и такой факт, что $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$. А в 12 в. Индийский математик Бхаскара написал книгу

«Лилавати», в которой среди других вопросов математики изучает и проблемы комбинаторики. Он пишет о применениях перестановок к подсчету вариаций в стихосложении, различных расположений в архитектуре и т.д. Он дает также правила для отыскания числа перестановок и сочетаний нескольких предметов, причем рассматривает также случай, когда в этих перестановках есть повторяющиеся элементы.

2.2. Историческая справка: Ньютон.

По материалам <http://to-name.ru/biography/isaak-njuton.htm>



Исаак Ньютон (1643-1727) — английский математик, механик, астроном и физик, создатель классической механики, член (1672) и президент (с 1703) Лондонского королевского общества. Один из основоположников современной физики, сформулировал основные законы механики и был фактическим создателем единой физической программы описания всех физических явлений на базе механики, открыл закон всемирного тяготения, объяснил движение планет вокруг Солнца и Луны вокруг Земли, а также приливы в океанах, заложил основы механики сплошных сред, акустики и физической оптики.

Исаак Ньютон появился на свет в небольшой деревушке в семье мелкого фермера, умершего за три месяца до рождения сына. Младенец был недоношенным, бытует легенда, что он был так мал, что его поместили в овчинную рукавицу, лежавшую на лавке, из которой он однажды выпал и сильно ударился головкой об пол.

Когда ребенку исполнилось три года, его мать вторично вышла замуж и уехала, оставив его на попечении бабушки. Ньютон рос болезненным и необщительным, склонным к мечтательности. Его привлекала поэзия и живопись, он, вдали от сверстников, мастерил бумажных змеев, изобретал ветряную мельницу, водяные часы, педальную повозку. Трудным было для Ньютона начало школьной жизни. Учился он плохо, был слабым мальчиком, и однажды одноклассники избили его до потери сознания. Переносить такое унижительное положение было для самолюбивого Исаака Ньютона невыносимо, и оставалось одно: выделиться успехами в учебе. Упорной работой он добился того, что занял первое место в классе.

Интерес к технике заставил Ньютона задуматься над явлениями природы, он углубленно занимался и математикой. Об этом позже написал Жан Батист Био: «Один из его дядей, найдя его однажды под изгородью с книгой в руках, погруженного в глубокое размышление, взял у него книгу и нашел, что он был занят решением математической задачи. Пораженный таким серьезным и деятельным направлением столь молодого человека, он уговорил его мать не противиться далее желанию сына и послать его для продолжения занятий». После серьезной подготовки Исаак Ньютон в 1660 поступил в Кембридж в качестве Subsizar'а (так назывались неимущие студенты, которые обязаны были прислуживать членам колледжа, что не могло не тяготить Ньютона).

Исаак Ньютон сформулировал основные законы классической механики. Открыл закон всемирного тяготения, дал теорию движения небесных тел, создав основы небесной механики. Пространство и время считал абсолютными. Работы Ньютона намного опередили общий научный уровень его времени, были малопонятны современникам. Был директором Монетного двора, наладил монетное дело в Англии.

Известный алхимик, Исаак Ньютон занимался хронологией древних царств. Теологические труды посвятил толкованию библейских пророчеств (большая часть не опубликованы).

Постоянное огромное нервное и умственное напряжение привело к тому, что в 1692 Ньютон заболел умственным расстройством. Непосредственным толчком к этому явился пожар, в котором погибли все подготавливавшиеся им рукописи. Лишь к 1694 он, по свидетельству Христиана Гюйгенса, «...начинает уже понимать свою книгу «Начала»».

Постоянное гнетущее ощущение материальной необеспеченности было, несомненно, одной из причин болезни Ньютона. Поэтому для него имело важное значение должность смотрителя Монетного двора с сохранением профессуры в Кембридже. Ревностно приступив к работе и быстро добившись заметных успехов, он был в 1699 назначен директором. Совмещать это с преподаванием было невозможно, и Ньютон перебрался в Лондон.

В 1689 году Ньютона постигло семейное горе - умерла от тифа его мать. Извещенный о ее болезни, он испросил в парламенте отпуск и поспешил к ней. Целые ночи проводил великий ученый у постели матери, сам давал ей лекарства и приготавливал горчичники и мушки, ухаживая за больной как самая лучшая сиделка. Но болезнь оказалась роковой. Смерть матери глубоко огорчила Ньютона и, быть может, немало способствовала сильной нервной раздражительности, проявившейся у него несколько позднее болезни.

Но и после своей болезни Исаак Ньютон продолжал научную работу, хотя и не с прежней интенсивностью. Он окончательно разработал теорию движения Луны и подготовил повторные издания своего бессмертного труда, в которых сделал много новых, весьма важных дополнений. После болезни он создал свою теорию астрономической рефракции, то есть преломления лучей светил в слоях земной атмосферы. Наконец, после болезни Исаак Ньютон решил несколько весьма трудных задач, предложенных другими математиками.

Ньютону было уже за пятьдесят лет. Несмотря на свою огромную славу и блестящий успех его книги (издание принадлежало не ему, а Королевскому обществу), Ньютон жил в весьма стесненных обстоятельствах, а иногда просто нуждался: случалось, что он не мог

уплатить пустячного членского взноса. Жалованье его было незначительно, и Ньютон тратил все, что имел, частью на химические опыты, частью на помощь своим родственникам, он помогал даже своей старинной любви — бывшей мисс Сторей. В конце 1703 г. Исаака Ньютона избрали президентом Королевского общества. К тому времени Ньютон достиг вершины славы. В 1705 г. его возводят в рыцарское достоинство, но, располагая большой квартирой, имея шесть слуг и богатый выезд, он остается по-прежнему одиноким. Пора активного творчества позади, и Ньютон ограничивается подготовкой издания «Оптики», переиздания «Начал» и толкованием "Священного Писания" (ему принадлежит толкование Апокалипсиса, сочинение о пророке Данииле).

Исаак Ньютон был похоронен в Вестминстерском аббатстве. Надпись на его могиле заканчивается словам: «Пусть смертные радуются, что в их среде жило такое украшение человеческого рода». (В. И. Григорьев)

Ньютон никогда не вел счета деньгам. Щедрость его была безгранична. Он говаривал: «Люди, не помогавшие никому при жизни, никогда никому не помогли». В последние годы жизни Ньютон стал богат и раздавал деньги, но и раньше, когда даже сам нуждался в необходимом, он всегда поддерживал близких и дальних родственников. Впоследствии Исаак Ньютон пожертвовал крупную сумму приходу, в котором родился, и часто давал стипендии молодым людям. Так, в 1724 году он назначил стипендию в двести рублей Маклорену, впоследствии знаменитому математику, отправив его за свой счет в Эдинбург в помощники к Джемсу Грегори.

С 1725 года Ньютон перестал ходить на службу.

Исаак Ньютон умер в 1726 году во время эпидемии чумы. В день его похорон был объявлен национальный траур. Его прах покоится в Вестминстерском аббатстве, рядом с другими выдающимися людьми Англии.

А при чем же здесь бином Ньютона и биномиальные коэффициенты? Формула $(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + C_n^n a^0 b^n =$
 $= a^n + n a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n!}{(n-m)! m!} a^{n-m} b^m + \dots + b^n$, где $m < n$

была известна ещё индийским и исламским математикам; Ньютон вывел формулу бинома для более общего случая, когда показатель степени — произвольное рациональное число (возможно, отрицательное).

2.3. Решение задач.

1. В биномиальном разложении $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{12}$ найти член разложения, не содержащий x .

Решение: $T_{m+1} = C_{12}^m \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^m = C_{12}^m x^{24-2m-2m} = C_{12}^m x^{24-4m}$

Так как в разложении мы ищем член не содержащий x , то $24 - 4m = 0 \Rightarrow m = 6$

Тогда $T_{6+1} = C_{12}^6 = \frac{12!}{(12-6)! 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 924$.

2. Доказать, что при любом натуральном n число $\binom{n}{3} + 15n - 1$ делится на 9

Доказательство:

$4^n = (3 + 1)^n = 3^n + C_n^{n-1} \cdot 3^{n-1} + C_n^{n-2} \cdot 3^{n-2} + \dots + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^1 \cdot 3^1 + 1$

$$\begin{aligned}
4^n + 15n - 1 &= \left[\binom{n}{n} + C_n^{n-1} \cdot 3^{n-1} + C_n^{n-2} \cdot 3^{n-2} + \dots + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^1 \cdot 3^1 + 1 \right] 15n - 1 = \\
&= 3 \cdot \left(3^{n-1} + n \cdot 3^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-3} + \dots + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^1 + 6n \right) = \\
&= 3 \cdot 3 \cdot \left(3^{n-2} + n \cdot 3^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-4} + \dots + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^0 + 2n \right) : 9
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

3. Решить уравнения а) $A_n^3 - 5C_{15}^3 = 455$; б) $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} = 55$.

Решение: а) $A_n^3 - 5C_{15}^3 = 455$; $\frac{n!}{(n-3)!} - 5 \cdot \frac{15!}{3!12!} = 455$; $\frac{n!}{(n-3)!} = 2730$; $n! = 2730(n-3)!$;

$$(n-3)! [n-2] \cdot (n-1) \cdot n - 2730 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (n-3)! = 0 \\ (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = 2730 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \emptyset, \text{ т.к. даже } 0! = 1 \\ n = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n = 15.$$

$$\text{б) } C_n^{n-2} + C_n^{n-1} = 55; \quad \frac{n!}{(n-2)!2!} + \frac{n!}{(n-1)!1!} = 55; \quad \frac{(n-1) \cdot n}{2} + \frac{n}{1} = 55; \quad n^2 + n - 110 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = -11 \notin N \\ n = 10 \end{cases} \Leftrightarrow n = 10.$$

4. Решить уравнение $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$.

Решение: Сделаем замену: $x-3 = y$: $(y+1)^6 + (y-1)^6 = 64$

Применим формулу бинома к левой части уравнения:

$$\begin{aligned}
(y+1)^6 + (y-1)^6 &= y^6 + 6y^5 + 15y^4 + 20y^3 + 15y^2 + 6y + 1 + \\
&+ y^6 - 6y^5 + 15y^4 - 20y^3 + 15y^2 - 6y + 1 = 2y^6 + 30y^4 + 30y^2 + 2
\end{aligned}$$

$$\text{В итоге } 2y^6 + 30y^4 + 30y^2 + 2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: $x = 2$; $x = 4$

5. Найти наибольший коэффициент многочлена $(2+x)^{10}$.

Решение: Имеем $(2+x)^{10} = 2^{10} \cdot 2^9 \cdot x + \dots + C_{10}^{k-1} \cdot 2^{11-k} \cdot x^{k-1} + C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^k + \dots + x^{10}$.

Сравним коэффициенты при степенях x : $C_{10}^{k-1} \cdot 2^{11-k}$ и $C_{10}^k \cdot 2^{10-k}$, $k \leq 12$.

Так как $2^{10} < C_{10}^1 \cdot 2^9$, то сначала коэффициенты растут с ростом k . Найдем наибольшее значение k такое, что $C_{10}^{k-1} \cdot 2^{11-k} \leq C_{10}^k \cdot 2^{10-k}$. Имеем:

$2 \cdot \frac{10!}{(k-1)!(11-k)!} \leq \frac{10!}{k!(10-k)!}$, $\frac{2}{11-k} \leq \frac{1}{k}$, $k \leq \frac{11}{3}$. Следовательно, коэффициенты растут при $k \leq 3$, при $k > 3$ коэффициенты убывают.

Ответ: $C_{10}^7 \cdot 2^7 = 15360$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти номер члена разложения бинома $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x})^6$, не содержащего x .
2. Найти пятый член разложения бинома $(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{3a}})^n$.
3. Найти сумму биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах в разложении бинома $(x + y)^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена на 9 больше биномиального коэффициента второго члена.
4. Найти седьмой член разложения бинома $(a^2\sqrt{a} + \frac{\sqrt[3]{a}}{a})^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена равен 36.
5. Сколько членов разложения бинома $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{36}$ являются целыми числами?
6. Вычислить сумму $C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + 2^3 C_5^3 + 2^4 C_5^4 + 2^5 C_5^5$.
7. Найти алгебраическую сумму коэффициентов многочлена относительно x , получаемого в разложении бинома $(3x - 4)^{17}$.
8. Сумма нечетных биномиальных коэффициентов разложения $(ax + x^{-1/4})^n$ равна 512.

Найти слагаемое, не содержащее x .

9. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5 + 2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?
10. При каком значении x четвертое слагаемое разложения $(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}})^m$ в двадцать раз больше m , если биномиальный коэффициент четвертого слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как 5 : 1?
11. В какую наибольшую степень следует возвести бином $(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3)$ чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему было равно $3\sqrt{2}$?
12. Найдите наибольший коэффициент многочлена $(3+x)^8$.

Ответы: 1. Решение: $T_m = C_6^m \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{6-m} \left(\frac{1}{x}\right)^m = C_6^m x^{2-\frac{m}{3}-m} = C_6^m x^{2-\frac{4m}{3}}$

Так как в разложении мы ищем член не содержащий x , то $2 - \frac{4m}{3} = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.
Следовательно, такого номера не существует.

$$2. T_5 = C_n^4 \cdot a^{\dots} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3a}} \right)^4.$$

Самостоятельная работа по теме «Бином Ньютона».

1. Найдите член разложения $(x^2 - 3x^{-3})^{10}$, не содержащий x .
2. Найдите седьмой член разложения $\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$.
3. Найдите наибольший член разложения $(+0,1)^{100}$.

Ответы: 1 вариант.

$$1. T_k = C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot (-2)^{10-k} \cdot (-3)^k \cdot (x^{-3})^k. \text{ Тогда } x^{2(10-k)} \cdot x^{-3k} = x^0, k=4.$$

$$T_4 = -C_{10}^4 \cdot 2^6 \cdot 3^4.$$

$$2. T_6 = C_{10}^6 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{10-6} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 210x^{\frac{4}{3}}.$$

$$3. \frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{C_{100}^{k+1} \cdot (0,1)^{k+1}}{C_{100}^k \cdot (0,1)^k} = \frac{100-k}{10(k+1)} > 1 \Leftrightarrow k < 8 \frac{2}{11}. \text{ Т.е. при } k \leq 8 \text{ коэффициенты возрастают.}$$

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{C_{100}^{k+1} \cdot (0,1)^{k+1}}{C_{100}^k \cdot (0,1)^k} = \frac{100-k}{10(k+1)} < 1 \Leftrightarrow k > 8 \frac{2}{11}. \text{ Т.е. при } k \geq 9 \text{ коэффициенты убывают.}$$

Значит $T_9 = C_{100}^9 \cdot 1^{100-9} \cdot (0,1)^9$ наибольший член разложения.