$= -6t_1 + 9t_2 + 12 = 0$. Из системы $\begin{cases} -14t_1 + 6t_2 - 2 = 0, \\ -6t_1 + 9t_2 + 12 = 0 \end{cases}$

имеем $t_1 = -1$ и $t_2 = -2$.

$K_1(1,2,3)$ и $K_2(9,-3,2)$ - искомые точки, а вектор $\overline{K_1K_2} = (8,-5,-1)$ - перпендикулярен данным прямым и поэтому $\overline{K_1K_2}$ - направляющий вектор для искомой прямой.

$\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{1}$ - каноническая форма искомой прямой.

Кратчайшее расстояние между прямыми равно $\left|\overline{K_1K_2}\right| = \sqrt{64+25+1} = 3\sqrt{10}$.

5.4.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Ниже будет доказано, что в декартовой системе координат Oxy любое линейное уравнение $Ax + By + C = 0$ есть уравнение прямой.

Уравнение прямой на плоскости может быть задано:

1) с помощью углового коэффициента и отрезка, отсекаемого от координатной оси Oy;

2) точкой прямой и направляющим вектором (направляющий вектор - вектор параллельный прямой);

3) двумя точками;

4) точкой прямой и нормальным вектором (нормальный вектор - вектор перпендикулярный прямой);

5) в «отрезках»;

6) ортом нормального вектора и расстоянием от начала координат до прямой.

1) Как известно, $y = kx + b$ - уравнение прямой, которая проходит через точку $(0,b)$ и составляет с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен k. Если указанная прямая проходит через точку (x_0, y_0), то $y_0 \equiv kx_0 + b$ и вычитая полученное тождество из уравнения прямой, имеем $y - y_0 = k(x - x_0)$. Это уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0), и с угловым коэффициентом k.

Если прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ параллельны, то их угловые коэффициенты совпадают.

2) Пусть $\bar{s} = (m,n)$ - направляющий вектор прямой, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Вектор $\bar{s} \parallel \overline{M_0M}$ для любой точки $M(x,y)$, лежащей на этой прямой, поэтому $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{s}$. Уравнение

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s} \qquad (5.14)$$

есть векторное уравнение прямой на плоскости (сравните с векторным уравнением прямой в пространстве), параметрическая форма которого

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases} \qquad (5.15)$$

Каноническая форма уравнения (5.14) имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (5.16)$$

3) Если прямая задана двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ этой прямой, то $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ является направляющим вектором и

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, заданной двумя точками.

4) Пусть $\overline{n} = (A, B)$- нормальный вектор прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Вектор $\overline{n} \perp \overline{M_0M}$ для любой точки $M(x, y)$, лежащей на этой прямой, поэтому $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$.

$$\overline{n} \cdot (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0 \qquad (5.17)$$

векторное уравнение прямой, заданной точкой и *нормальным вектором* прямой (сравните с векторным уравнением плоскости в пространстве).

Уравнение (5.17) в координатной форме имеет вид

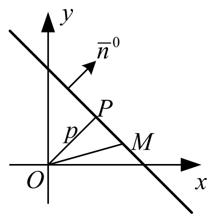
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Если $C = -Ax_0 - By_0$, то имеем уравнение $Ax + By + C = 0$, которое называется *общим уравнением* прямой на плоскости.

5) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ - уравнение прямой в *«отрезках»*. Прямая проходит через точки $(a, 0)$ и $(0, b)$.

6) Прямая может быть задана ортом нормального вектора $\overline{n}^0$, направленного из начала координат в сторону прямой, и расстоянием от начала координат до этой прямой.

Пусть $\overline{n}^0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ - орт нормального вектора прямой, а p - расстояние от начала координат до прямой.



Из начала координат опустим перпендикуляр на прямую. Точку пересечения перпендикуляра и прямой обозначим P. Для любой точки прямой $M(x, y)$ проекция вектора $\overline{OM}$ на направление вектора $\overline{n}^0$ равна p, т.е. $\text{пр}_{\overline{n}^0} \overline{OM} = |\overline{OP}| = p$, откуда $\overline{n}^0 \cdot \overline{OM} = p$ и

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (5.18)$$

Уравнение (10) называется *нормированным* уравнением прямой.

Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ можно привести к нормированному виду $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

Число $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ называется *нормирующим* множителем.

Умножив общее уравнение прямой на нормирующий множитель, взятый со знаком плюс, если $C < 0$, и со знаком минус, если $C > 0$, получим нормированное уравнение прямой.

Замечание. Так как $\sqrt{A^2 + B^2}$ есть длина нормального вектора $\overline{n} = (A, B)$ общего уравнения прямой, то нормирующий множитель равен $\dfrac{\pm 1}{|\overline{n}|}$.

Пусть d - расстояние от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ до прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Отклонением δ точки $M^*(x^*, y^*)$ от прямой называется число d (расстояние от точки M^* до прямой), если точка M^* и начало координат лежат по разные стороны от прямой, и число - d, если точка M^* и начало координат лежат по одну сторону от прямой.

Очевидно, $\text{пр}_{\overline{n}^0} \overline{OM}^* = p + \delta$, откуда $\overline{n}^0 \cdot \overline{OM}^* = p + \delta$ и $\delta = \overline{n}^0 \cdot \overline{OM}^* - p$. Из последнего равенства имеем

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \sin - p. \qquad (5.18)$$

Итак, *чтобы найти отклонение точки от прямой необходимо в нормированное уравнение прямой подставить координаты данной точки.*

Расстояние d от точки M^* до прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ равно модулю отклонения, т.е.

$$d = \left|x^*\cos\alpha + y^*\sin\alpha - p\right|. \qquad (5.19)$$

Итак, *чтобы найти расстояние от точки до прямой необходимо в нормированное уравнение прямой подставить координаты данной точки и полученное выражение взять по модулю.*

Если имеем общее уравнение прямой, то расстояние от точки $M^*\left(x^*, y^*\right)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \left|\frac{Ax^* + By^* + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Совокупность всех прямых, проходящих через одну и ту точку $M_0(x_0, y_0)$, называется *пучком прямых* с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ есть точка пересечения двух не параллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Очевидно, что при $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ прямая

$$\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0 \quad (5.19)$$

проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, т.е уравнение (5.19) есть уравнение пучка прямых с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пример 16. Через точку пересечения прямых $x + y - 3 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ провести прямую,

1) проходящую через начало координат;
2) проходящую через точку $D(1,2)$;
3) параллельную оси Ox;
4) параллельную оси Oy;
5) параллельную прямой $4x - y + 3 = 0$;
6) перпендикулярную прямой $4x - y + 3 = 0$;
7) отсекающую на осях координат равные отрезки.

Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения прямых $x + y - 3 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ имеет вид $\alpha(x + y - 3) + \beta(3x + y - 7) = 0$ - или

$$(\alpha + 3\beta)x + (\alpha + \beta)y - 3\alpha - 7\beta = 0. \qquad (5.20)$$

Вектор $\overline{n} = (\alpha + 3\beta, \alpha + \beta)$- нормальный вектор этого пучка прямых.

1) Если прямая проходит через начало координат, то $3\alpha + 7\beta = 0$. Выбрав $\alpha = 7$, получим $\beta = -3$, и искомое уравнение имеет вид $-2x + 4y = 0$ или $x - 2y = 0$.

2) Точка $D(1,2)$ лежит на прямой, поэтому её координаты удовлетворяют уравнению

$(\alpha + 3\beta) + 2(\alpha + \beta) - 3\alpha - 7\beta = 0$, откуда $\beta = 0$, $\alpha = 1$ и $x + y - 3 = 0$ - уравнение искомой прямой.

3) Если прямая параллельна оси Ox, то $A = 0$, т.е. $\alpha + 3\beta = 0$, $\alpha = 3,\ \beta = -1$ и уравнение искомой прямой $2y - 2 = 0$ или $y - 1 = 0$.

4) Если прямая параллельна оси Oy, то $\alpha + \beta = 0$. Полагая $\alpha = 1$, получим $\beta = -1$ и уравнение искомой прямой имеет вид $-2x + 4 = 0$ или $x - 2 = 0$.

5) $\overline{n}_1 = (4,-1)$- нормальный вектор данной прямой. Так как прямые параллельны, то $\overline{n} \parallel \overline{n}_1$ и $\dfrac{\alpha + 3\beta}{4} = \dfrac{\alpha + \beta}{-1}$, откуда при $\alpha = 7$ $\beta = -5$ и уравнение искомой прямой $4x - y - 7 = 0$.

6) $\overline{n}_1 = (4,-1)$- нормальный вектор данной прямой. Так как прямые перпендикулярны, то $\overline{n} \perp \overline{n}_1$ и скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е. $4(\alpha + 3\beta) - (\alpha + \beta) = 0$, откуда при $\alpha = 11,\ \beta = -3$ и уравнение искомой прямой $x + 4y - 6 = 0$.

7) Так как прямая отсекает от координатных осей отрезки одинаковой длины, то $\alpha + 3\beta = \pm(\alpha + \beta)$. При $\alpha + 3\beta = \alpha + \beta$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$ и искомое уравнение прямой в этом случае

$x+y-3=0$. При $\alpha+3\beta=-(\alpha+\beta)$, $\alpha=2$, $\beta=-1$ и $-x+y+1=0$ - уравнение искомой прямой.

Пример 17. Провести прямые, параллельные прямой $4x-3y+15=0$, и отстоящие от неё на расстоянии 2 единиц.

Решение. Приведём уравнение прямой к нормированному виду. Нормальный вектор прямой $\overline{n}=(4,-3)$и нормирующий множитель - $\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}$. $\frac{-4}{5}x+\frac{3}{5}y-3=0$ - нормированное уравнение прямой.

Отклонение δ равно ± 2. Тогда $\pm 2=\frac{-4}{5}x+\frac{3}{5}y-3$ и $4x-3y+5=0$ и $4x-3y+25=0$ - искомые уравнения.

Пример 18. Сторона AB треугольника ABC лежит на прямой $\begin{cases} x=3+t, \\ y=9-3t. \end{cases}$ Через вершину A проведены биссектриса и высота. Составить уравнения остальных сторон этого треугольника, если $x+y-14=0$ - уравнение биссектрисы, а точка $M(7,2)$- основание высоты.

Решение. Общее уравнение прямой AB имеет вид $3x+y-18=0$.

$\alpha(3x+y-18)+\beta(x+y-14)=0$ - уравнение пучка прямых с центром в точке A.

Точка $M(7,2)$ лежит на прямой, принадлежащей этому пучку, поэтому $\alpha(3\cdot 7+2-18)+\beta(7+2-14)=0$, откуда можно выбрать $\alpha=\beta=1$. Подставляя α,β в уравнение пучка, имеем $4x+2y-32=0$ или $2x+y-16=0$- уравнение высоты AM.

Очевидно, $\overline{s}_{BC}=\overline{n}_{AM}=(2,1)$, тогда $\begin{cases} x=7+2t, \\ y=2+t \end{cases}$- уравнение стороны BC.

На прямой AB выберем произвольную точку, отличную от A. При $t=0$ имеем точку $N(3,9)$. Пусть точка $K(x_0,14-x_0)$ проекция точки N на биссектрису. Тогда вектор $\overline{NK}=(x_0-3,5+x_0)$ параллелен нормальному вектору биссектрисы $\overline{n}_{AK}=(1,1)$,откуда $\frac{x_0-3}{1}=\frac{5+x_0}{1}$ и $K(4,10)$. Найдем точку Q, симметричную точке N относительно биссектрисы.

$\overline{NK}=(1,1)$, $\overline{r}_Q=\overline{r}_K+\overline{KQ}=\overline{r}_K+\overline{NK}=(5,11)$.

Сторона AC принадлежит пучку с ценпром в точке A, точка Q принадлежит этой прямой, поэтому $\alpha(3\cdot 5+11-18)+\beta(5+11-14)=0$, $8\alpha+2\beta=0$. При $\alpha=1$ $\beta=-4$ и $3x+y-18-4(x+y-14)=0$ или $x+3y-38=0$- уравнение стороны AC.