
А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский,
В.Б. Полонский, М.С. Якир

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
к учебнику

ГЕОМЕТРИЯ
10 класс

Базовый уровень

От авторов

Данное пособие вместе с учебником входят в учебно-методический комплект «Геометрия. 10 класс» авторов А.Г. Мерзляка и др.

Раздел «Упражнения» состоит из трёх однотипных вариантов по 214 задач в каждом (задачи, имеющие одинаковые номера, являются однотипными). Этот материал в первую очередь предназначен для самостоятельных проверочных работ. Наличие к каждому типу задач ещё двух аналогичных заданий (по вариантам) позволяет также использовать этот материал для отработки навыков решения основных типов задач.

Раздел «Контрольные работы» содержит примерные контрольные работы.

Основные понятия стереометрии.

Аксиомы стереометрии

- Изобразите: плоскость α , проходящую через прямую m ; точку E , принадлежащую плоскости α и не принадлежащую прямой m ; точку M , не принадлежащую плоскости α ; прямую s , пересекающую плоскость α в точке E . Запишите с помощью соответствующих символов утверждение:
 - плоскость α проходит через прямую m ;
 - точка E принадлежит плоскости α ;
 - точка M не принадлежит плоскости α ;
 - прямая s пересекает плоскость α в точке E .
- Сколько плоскостей можно провести через точки A , B и C , если:
 - $AB = 13$ см, $BC = 17$ см, $AC = 24$ см;
 - $AB = 14$ см, $BC = 16$ см, $AC = 30$ см?
- Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости (рис. 1). На отрезке AC отметили точку M , а на отрезке BC — точку K так, что $AM : MC = CK : KB = 1 : 2$. Постройте:
 - линию пересечения плоскостей ABC и DMK ;
 - точку пересечения прямой MK с плоскостью ABD .
- Плоскости α и β пересекаются по прямой a . В плоскости β проведена прямая b , пересекающая плоскость α . Докажите, что точка пересечения прямой b и плоскости α принадлежит прямой a .
- Вершина A треугольника ABC принадлежит плоскости α , а вершины B и C ей не принадлежат. Продолжения биссектрис BM и CK треугольника ABC пересекают плоскость α в точках E и F соответственно. Докажите, что точки A , M и K лежат на одной прямой.
- Средины трёх сторон треугольника принадлежат плоскости α . Докажите, что вершины данного треугольника принадлежат плоскости α .

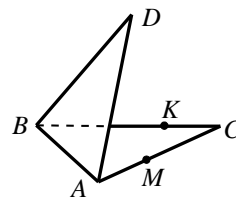


Рис. 1

Следствия из аксиом стереометрии

- Точка A принадлежит плоскости α . Докажите, что через точку A можно провести плоскость, отличную от плоскости α .
- Ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O , лежит в плоскости α . Точка M не принадлежит плоскости α . Можно ли провести плоскость через прямую AM и точки O и C ?
- Прямые a и b пересекаются в точке O . Докажите, что все прямые, которые пересекают прямую b и проходят через произвольную точку прямой a , отличную от точки O , лежат в одной плоскости.
- Точки M и N лежат по одну сторону от плоскости β , а точки M и K — по разные стороны. Известно, что прямые MN , MK и NK пересекают плоскость β . Докажите, что точки их пересечения с плоскостью β лежат на одной прямой.

Пространственные фигуры. Начальные сведения о многогранниках

11. Точка M — середина ребра SA пирамиды $SABC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки B , C и M .
12. На рёбрах SB и SC пирамиды $SABC$ отметили соответственно точки M и K (рис. 2). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC , если прямые MK и BC не параллельны.
13. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки: 1) A_1 , C_1 и D ; 2) A , C и середину ребра BB_1 .
14. Дана призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 3). Точка M принадлежит ребру DD_1 , точка K — ребру CC_1 . Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью $A_1 B_1 C_1$.

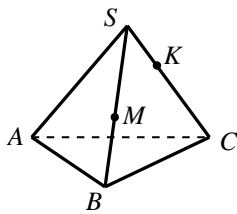


Рис. 2

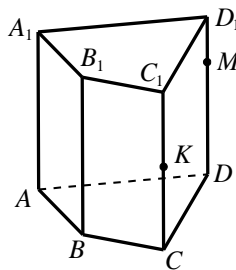


Рис. 3

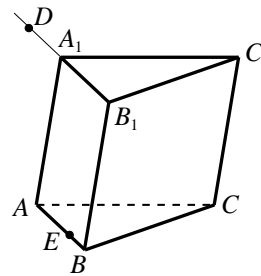


Рис. 4

15. Дана призма $ABCA_1 B_1 C_1$ (рис. 4). Точка D принадлежит прямой $A_1 B_1$, точка E — ребру AB . Постройте сечение призмы плоскостью CDE .
16. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ (рис. 5) плоскостью, проходящей через точки M , P и K , принадлежащие рёбрам SA , AC и SB соответственно.

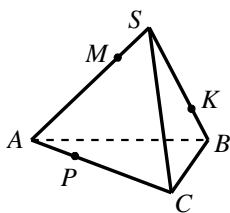


Рис. 5

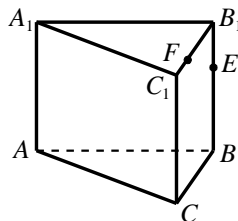


Рис. 6

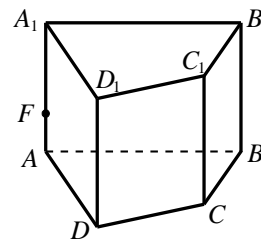


Рис. 7

17. Постройте сечение призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ (рис. 6) плоскостью, проходящей через точку A и точки E и F , которые лежат на рёбрах BB_1 и $B_1 C_1$ соответственно.
18. Постройте сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 7) плоскостью, проходящей через вершины C и D_1 и точку F ребра AA_1 .

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

19. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 8). Укажите его рёбра:

1) параллельные ребру AD ; 2) скрещивающиеся с ребром AD .

20. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD — скрещивающиеся.

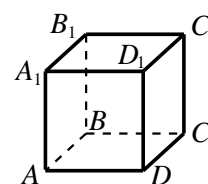


Рис. 8

21. Прямые a и b параллельны, а прямая c пересекает каждую из них. Докажите, что прямые a, b и c лежат в одной плоскости.

22. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая a , не принадлежащая плоскости ABC , а через точку C — прямая b , параллельная прямой BD . Докажите, что прямые a и b скрещивающиеся.

23. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α , а через точку B — прямая, пересекающая плоскость α в точке B_1 . Точка C принадлежит отрезку AB .

1) Постройте точку C_1 пересечения плоскости α с прямой, проходящей через точку C и параллельной прямой BB_1 .

2) Найдите отрезок BB_1 , если $AB = 10$ см, $AC : CC_1 = 2 : 5$.

24. На отрезке AB , который не пересекает плоскость α , отметили точку C . Через точки A, B и C провели параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно.

1) Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

2) Найдите отрезок B_1C_1 , если $AC = 7$ см, $BC = 21$ см, $A_1C_1 = 12$ см.

25. Треугольник ABC не имеет общих точек с плоскостью α . Отрезок AD — медиана треугольника ABC , точка M — середина отрезка AD (рис. 9). Через точки A, B, C, D и M провели параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, D_1 и M_1 соответственно. Найдите отрезок CC_1 , если $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 8$ см, $MM_1 = 5$ см.

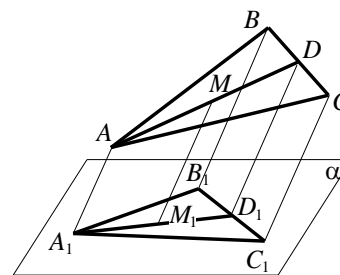


Рис. 9

Параллельность прямой и плоскости

26. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 10). Плоскостям каких граней куба параллельна прямая CD ?
27. Точка A не принадлежит плоскости α . Сколько существует прямых, которые проходят через точку A и параллельны плоскости α ?
28. Точка M не принадлежит плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости MCB .
29. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC , точки M, N, P и K — середины отрезков AD, AB, BC и CD соответственно. Докажите, что $MK \parallel NP$.
30. Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена плоскость, которая параллельна прямой AC и пересекает сторону BC в точке N . Докажите, что отрезок MN — средняя линия треугольника ABC .
31. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках B_1 и C_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1 C = 3 : 2$ и $B_1 C_1 = 5$ см. Найдите отрезок BC , если прямая BC и плоскость α параллельны.
32. Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) лежит в плоскости α , $AB = 8$ см. Вне плоскости α выбрали точку M и на отрезке AM отметили такую точку K , что $AK : KM = 3 : 1$ (рис. 11). Постройте точку F пересечения плоскости DKC и прямой MB и найдите отрезок KF .

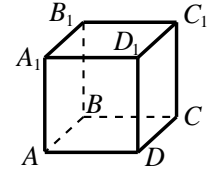


Рис. 10

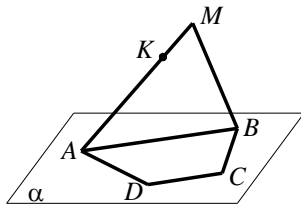


Рис. 11

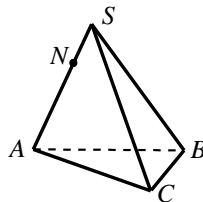


Рис. 12

33. На ребре AC тетраэдра $SABC$ отметили точку D . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки S и D и параллельной прямой BC .
34. Постройте сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, которая проходит через точки M и K , принадлежащие соответственно рёбрам AB и $C_1 D_1$, и параллельна прямой CC_1 .
35. Постройте сечение пирамиды $SABC$ (рис. 12) плоскостью, которая проходит через точку N на ребре SA и параллельна прямым AB и SC .
36. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, которая проходит через точки D и E , принадлежащие соответственно рёбрам SA и SC , и параллельна прямой BC .
37. Постройте точку пересечения с плоскостью нижнего основания четырёхугольной призмы прямой, проходящей через две точки, одна из которых принадлежит боковому ребру призмы, а другая — боковой грани, которой это ребро не принадлежит.
38. Постройте точку пересечения с плоскостью нижнего основания треугольной призмы прямой, проходящей через две точки, принадлежащие двум разным боковым граням призмы.

Параллельность плоскостей

39. Стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ параллельны плоскости α . Докажите, что прямая AC параллельна плоскости α .
40. Плоскости α и β параллельны. В плоскости α выбраны точки M и N , а в плоскости β — точки M_1 и N_1 такие, что прямые MM_1 и NN_1 параллельны. Найдите отрезки NN_1 и M_1N_1 , если $MN = 5$ см, $MM_1 = 6$ см.
41. Плоскости α и β параллельны, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $D \in \beta$, $AC \parallel BD$, $CD = 3\sqrt{2}$ см, $BD = 4$ см, $\angle ABD = 135^\circ$. Найдите отрезок AD .
42. Медианы AM и CK треугольника ABC параллельны плоскости α . Через точки A и B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что четырёхугольник AA_1B_1B — параллелограмм.
43. Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α . Плоскость β , параллельная плоскости α , пересекает стороны AC и BC в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите отрезок A_1B_1 , если $A_1C = 9$ см, $AA_1 = 3$ см, $AB = 8$ см.
44. Плоскости α и β параллельны. Прямые a и b принадлежат плоскостям α и β соответственно. Через прямую a проведена плоскость, пересекающая плоскость β по прямой c , которая параллельна прямой b . Докажите, что $a \parallel b$.
45. Плоскости α и β параллельны. Через точку O , находящуюся между этими плоскостями, проведены две прямые. Одна из них пересекает плоскости α и β в точках A_1 и B_1 , а другая — в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите угол OA_1A_2 , если $\angle B_1OB_2 = 34^\circ$, $\angle OB_2B_1 = 78^\circ$.
46. Плоскости α и β параллельны. Из точки M , не принадлежащей этим плоскостям и не находящейся между ними, проведены два луча. Один из них пересекает плоскости α и β в точках A_1 и B_1 , а другой — в точках A_2 и B_2 соответственно, точка A_1 лежит между точками M и B_1 . Найдите отрезок MB_1 , если $MA_1 = 9$ см, $B_1B_2 = 4$ см, $A_1A_2 = A_1B_1$.
47. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точку M , принадлежащую ребру $A_1 B_1$, и прямую AC .
48. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 4 см. На отрезке AC отметили точку M так, что $AM : MC = 3 : 1$. Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через точку M и параллельна плоскости $BC_1 D$, и вычислите периметр сечения.
49. На ребре CD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отметили точку M так, что $CM : MD = 2 : 3$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости $AB_1 C_1$. Найдите периметр построенного сечения, если $CD = 12,5$ см, $CC_1 = 30$ см, $AD = 17$ см.

50. На рёбрах AA_1 , BB_1 и AD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отметили соответственно точки M , K и E (рис. 13). Постройте сечение куба плоскостью MKE .

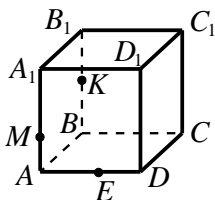


Рис. 13

51. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, которая проходит через точки M , K и N , принадлежащие соответственно рёбрам AB , $B_1 C_1$ и CC_1 .

Преобразование фигур в пространстве.

Параллельное проектирование

52. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 14). При некотором параллельном переносе образом точки B является точка B_1 . Какая фигура при данном параллельном переносе является образом:

- 1) точки C ; 2) отрезка AD ; 3) отрезка AC ?

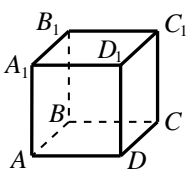


Рис. 14

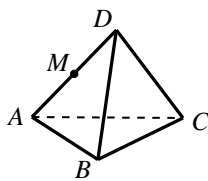


Рис. 15

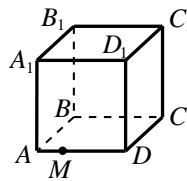


Рис. 16

53. На рисунке 15 изображён тетраэдр $DABC$, точка M — середина ребра AD . Постройте образ данного тетраэдра при параллельном переносе, в результате которого:

- 1) образом точки A является точка C ;
2) образом точки B является точка M .

54. На рисунке 16 изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, на ребре AD которого отметили точку M . Постройте образ данного куба при симметрии относительно: 1) вершины C ; 2) точки M .

55. Может ли быть параллельной проекцией параллелограмма четырёхугольник $A_1 B_1 C_1 D_1$, углы которого A_1 , B_1 , C_1 и D_1 соответственно равны 70° , 110° , 110° и 70° ?

56. В каком случае параллельной проекцией треугольника является:

- 1) отрезок;
2) треугольник, равный данному треугольнику?

57. Треугольник $A_1B_1C_1$ является изображением равностороннего треугольника ABC , точка M_1 — изображение некоторой точки M , принадлежащей треугольнику, но не лежащей на его сторонах (рис. 17). Постройте изображения перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AC и AB .

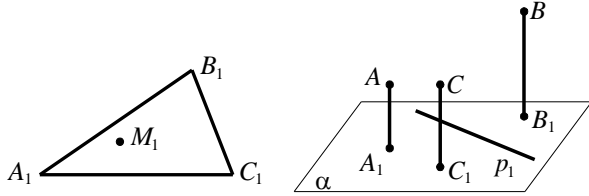


Рис. 17

Рис. 18

58. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — изображение ромба $ABCD$, в котором $BD = AB$. Постройте изображение высоты ромба, опущенной из вершины D на сторону AB .
59. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение равностороннего треугольника ABC . Постройте изображение ромба $ADEF$, если $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in AC$.
60. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — изображение квадрата $ABCD$. Постройте изображение прямоугольного равнобедренного треугольника ADE с гипотенузой AD , лежащего в плоскости ABC и расположенного вне квадрата $ABCD$.
61. Трапеция $A_1B_1C_1D_1$ — изображение трапеции $ABCD$, в которой $AB = BC = CD$, $BC < AD$. Постройте изображение центра окружности, касающейся боковых сторон и меньшего основания трапеции $ABCD$.
62. Точки A_1 , B_1 , C_1 — параллельные проекции точек A , B , C на плоскость α (рис. 18), прямая p_1 — проекция прямой p , лежащей в плоскости ABC , на плоскость α . Постройте прямую p .

Основные понятия стереометрии.

Аксиомы стереометрии

- Изобразите: плоскость β и прямую a , лежащую в этой плоскости; точку C , не принадлежащую плоскости β ; прямую b , пересекающую плоскость β в точке K , принадлежащей прямой a . Запишите с помощью соответствующих символов утверждение:
 - 1) прямая a лежит в плоскости β ;
 - 2) точка C не принадлежит плоскости β ;
 - 3) точка K принадлежит плоскости β ;
 - 4) прямая b пересекает плоскость β в точке K .
- Сколько плоскостей можно провести через точки M, N и K , если:
 - 1) $MN = 17$ см, $NK = 14$ см, $MK = 31$ см;
 - 2) $MN = 19$ см, $NK = 12$ см, $MK = 15$ см?
- Квадрат $ABCD$ и треугольник CDM не лежат в одной плоскости (рис. 33). На отрезке CM отметили точку E , а на отрезке DM — точку F так, что $ME : EC = DF : FM = 2 : 3$. Постройте:
 - 1) линию пересечения плоскостей BEF и CDM ;
 - 2) точку пересечения прямой EF с плоскостью ABC .
- Плоскости α и β пересекаются по прямой a . В плоскостях α и β проведены соответственно прямые m и n , которые пересекаются. Докажите, что точка пересечения прямых m и n принадлежит прямой a .
- Вершина D четырёхугольника $ABCD$ принадлежит плоскости α , а остальные вершины лежат вне этой плоскости. Продолжения стороны BC и диагонали AC пересекают плоскость α в точках M и N соответственно. Докажите, что точки D, M и N лежат на одной прямой.
- Основания биссектрис треугольника принадлежат плоскости α . Докажите, что вершины данного треугольника принадлежат плоскости α .

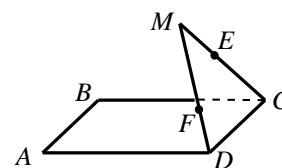


Рис. 33

Следствия из аксиом стереометрии

- Прямая a принадлежит плоскости α . Докажите, что через прямую a можно провести плоскость, отличную от плоскости α .
- Треугольник ABC , в котором $AB = BC$, лежит в плоскости α . Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , точка D — середина отрезка AC . Точка M не принадлежит плоскости α . Можно ли провести плоскость через прямую BM и точки O и D ?
- Через точку A проведены две прямые, пересекающие каждую из прямых a и b в точках, отличных от точки A . Докажите, что прямые a и b лежат в одной плоскости.
- Вершины A и B треугольника ABC лежат по одну сторону от плоскости α , а вершина C — по другую. Докажите, что точки пересечения сторон BC и AC и медианы CM с плоскостью α лежат на одной прямой.

Пространственные фигуры.

Начальные сведения о многогранниках

11. Точка M — середина ребра SB пирамиды $SABC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и прямую AC .
12. На рёбрах AB и AC пирамиды $SABC$ отметили соответственно точки M и K (рис. 34). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью SBC , если прямые MK и BC не параллельны.
13. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки: 1) A, C и B_1 ; 2) B_1, D_1 и середину ребра AA_1 .

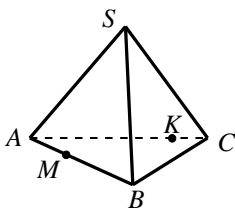


Рис. 34

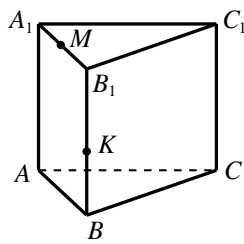


Рис. 35

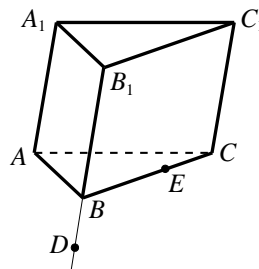


Рис. 36

14. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 35). Точка M принадлежит ребру A_1B_1 , точка K — ребру BB_1 . Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC .
15. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 36). Точка D принадлежит прямой BB_1 , точка E — ребру BC . Постройте сечение призмы плоскостью A_1DE .
16. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ (рис. 37) плоскостью, которая проходит через точки T, F и E , принадлежащие ребрам SA, AB и BC соответственно.

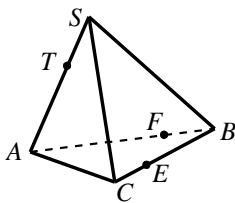


Рис. 37

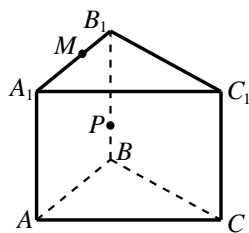


Рис. 38

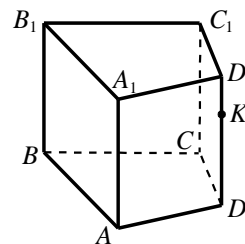


Рис. 39

17. Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 38) плоскостью, проходящей через точку C и точки P и M , которые лежат на рёбрах BB_1 и A_1B_1 соответственно.
18. Постройте сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 39) плоскостью, проходящей через вершины B_1 и C и точку K ребра DD_1 .

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

19. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 40). Укажите его рёбра:

1) параллельные ребру DD_1 ; 2) скрещивающиеся с ребром DD_1 .

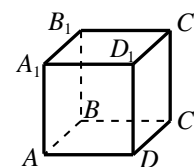


Рис. 40

20. Точки A и B принадлежат прямой a , точки C и D — прямой b , причём $a \parallel b$. Докажите, что прямые AC и BD не являются скрещивающимися.

21. На одной из двух пересекающихся прямых выбрали точку и через неё провели прямую, параллельную второй прямой. Докажите, что эти три прямые лежат в одной плоскости.

22. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая a , не принадлежащая плоскости треугольника. Точка M — середина стороны AC . Докажите, что прямые a и BM — скрещивающиеся.

23. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α , а через точку B — прямая, пересекающая плоскость α в точке B_1 . На продолжении отрезка AB за точку B отметили точку C .

1) Постройте точку C_1 пересечения плоскости α с прямой, проходящей через точку C и параллельной прямой BB_1 .

2) Найдите отрезок AB , если $AC : CC_1 = 7 : 4$, $BB_1 = 8$ см.

24. На отрезке CD , который не пересекает плоскость β , отметили точку E . Через точки C, D и E провели параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках C_1, D_1 и E_1 соответственно.

1) Докажите, что точки C_1, D_1 и E_1 лежат на одной прямой.

2) Найдите отрезок CE , если $ED = 18$ см, $C_1E_1 = 16$ см, $E_1D_1 = 24$ см.

25. Треугольник ABC не имеет общих точек с плоскостью α . Точки M и N — середины соответственно отрезков AB и AC (рис. 41). Через точки A, B, C, M и N провели параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, M_1 и N_1 соответственно. Найдите отрезок NN_1 , если $BB_1 = 11$ см, $CC_1 = 7$ см, $MM_1 = 10$ см.

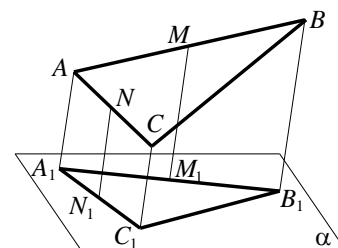


Рис. 41

Параллельность прямой и плоскости

26. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 42). Плоскостям каких граней куба параллельна прямая AA_1 ?

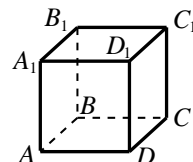


Рис. 42

27. Через точку A , не принадлежащую плоскости α , проведена прямая a , параллельная плоскости α . Сколько существует в плоскости α прямых, параллельных прямой a ?

28. Отрезок AB лежит в плоскости α . Точка M не принадлежит плоскости α . Точки K и P — середины отрезков MA и MB соответственно. Докажите, что прямая KP параллельна плоскости α .

29. Точка S не принадлежит плоскости трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , точки M, N, P и K — середины отрезков AB, BS, SC и CD соответственно. Докажите, что $MK \parallel NP$.

30. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ параллельна плоскости γ , а лучи AD и AB пересекают эту плоскость в точках M и N соответственно. Докажите, что треугольники DAB и MAN подобны.

31. Плоскость, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1 соответственно. Найдите отношение $AA_1 : AB$, если $A_1C_1 = 6$ см, $AC = 9$ см.

32. Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ выбрали точку E . На отрезке BE отметили точку F так, что $BF : FE = 4 : 1$ (рис. 43). Постройте точку M пересечения плоскости AFD и прямой CE и найдите отрезок FM , если $BC = 12$ см.

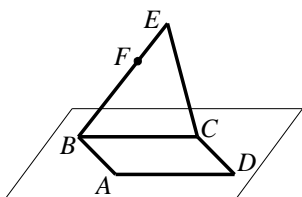


Рис. 43

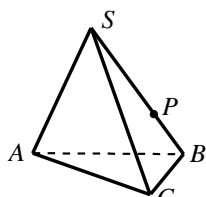


Рис. 44

33. На ребре SB тетраэдра $SABC$ отметили точку D . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и D и параллельной прямой AB .

34. Постройте сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, которая проходит через точки E и F , принадлежащие соответственно рёбрам AB и CD , и параллельна прямой BB_1 .

35. Постройте сечение пирамиды $SABC$ (рис. 44) плоскостью, которая проходит через точку P на ребре SB и параллельна прямым BC и SA .

36. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, которая проходит через точки D и E , принадлежащие соответственно рёбрам AB и BC , и параллельна прямой SA .

37. Постройте точку пересечения с плоскостью нижнего основания треугольной призмы прямой, проходящей через две точки, одна из которых принадлежит боковому ребру призмы, а другая — боковой грани, которой это ребро не принадлежит.

38. Постройте точку пересечения с плоскостью нижнего основания четырёхугольной призмы прямой, проходящей через две точки, принадлежащие двум соседним боковым граням призмы.

Параллельность плоскостей

39. Стороны AC и BC треугольника ABC параллельны плоскости α . Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .
40. Плоскости α и β параллельны. В плоскости α выбраны точки C и D , а в плоскости β — точки C_1 и D_1 такие, что прямые CC_1 и DD_1 параллельны. Найдите отрезки CC_1 и CD , если $DD_1 = 12$ см, $C_1D_1 = 17$ см.
41. Плоскости α и β параллельны, $M \in \alpha$, $N \in \alpha$, $P \in \beta$, $K \in \beta$, $MP \parallel NK$, $MP = 5$ см, $MN = 8$ см, $\angle MNK = 120^\circ$. Найдите отрезок MK .
42. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) параллельны плоскости β . Через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что четырёхугольник BB_1C_1C — параллелограмм.
43. Сторона BC треугольника ABC лежит в плоскости α . Плоскость β , параллельная плоскости α , пересекает стороны AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите отрезок BC , если $B_1C_1 = 12$ см, $AC_1 : C_1C = 3 : 5$.
44. Плоскость α параллельна плоскости β и прямой a , не лежащей в плоскости β . Докажите, что прямая a параллельна плоскости β .
45. Плоскости α и β параллельны. Через точку M , находящуюся между этими плоскостями, проведены две прямые. Одна из них пересекает плоскости α и β в точках C_1 и D_1 , а другая — в точках C_2 и D_2 соответственно. Найдите угол MD_1D_2 , если $\angle C_1MC_2 = 56^\circ$, $\angle C_1C_2M = 43^\circ$.
46. Плоскости α и β параллельны. Из точки D , не принадлежащей этим плоскостям и не находящейся между ними, проведены два луча. Один из них пересекает плоскости α и β в точках E_1 и F_1 , а другой — в точках E_2 и F_2 соответственно, точка E_2 лежит между точками D и F_2 . Найдите отрезок DF_2 , если $F_1F_2 = 12$ см, $DE_2 = 2$ см, $E_1E_2 = E_2F_2$.
47. Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точку D , принадлежащую ребру A_1C_1 , и прямую AB .
48. Точка M — середина ребра BC пирамиды $SABC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через точку M и параллельна плоскости ASC , и вычислите периметр сечения, если $SA = 24$ см, $SC = 10$ см, $AC = 26$ см.
49. На ребре AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отметили точку K так, что $AK : KD = 3 : 4$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку K и параллельной плоскости $A_1 B_1 C$. Найдите периметр построенного сечения, если $AD = 21$ см, $AA_1 = 28$ см, $AB = 10$ см.
50. На рёбрах BB_1 , CC_1 и CD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отметили соответственно точки M , N и E (рис. 45). Постройте сечение куба плоскостью MNE .
51. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, которая проходит через точки M , P и K , принадлежащие соответственно рёбрам $C_1 D_1$, BC и DD_1 .

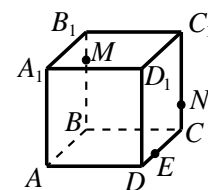


Рис. 45

Преобразование фигур в пространстве.

Параллельное проектирование

52. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 46). При некотором параллельном переносе образом точки C_1 является точка B_1 . Какая фигура при данном параллельном переносе является образом:

- 1) точки D ; 2) отрезка CC_1 ; 3) отрезка CD_1 ?

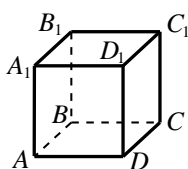


Рис. 46

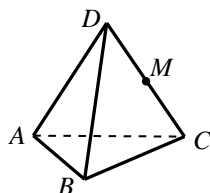


Рис. 47

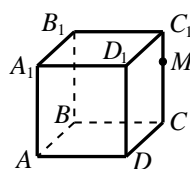


Рис. 48

53. На рисунке 47 изображён тетраэдр $DABC$, точка M — середина ребра CD . Постройте образ данного тетраэдра при параллельном переносе, в результате которого:

- 1) образом точки A является точка B ;
2) образом точки A является точка M .

54. На рисунке 48 изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, на ребре CC_1 которого отметили точку M . Постройте образ данного куба при симметрии относительно: 1) вершины A_1 ; 2) точки M .

55. Может ли ромб быть параллельной проекцией четырёхугольника $ABCD$, углы которого соответственно равны 20° , 100° , 160° и 80° ?

56. В каком случае параллельной проекцией отрезка является:

- 1) точка;
2) отрезок, равный данному отрезку?

57. Треугольник $A_1 B_1 C_1$ является изображением прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB (рис. 49). Постройте изображения серединных перпендикуляров отрезков AC и BC .

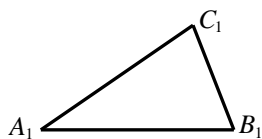


Рис. 49

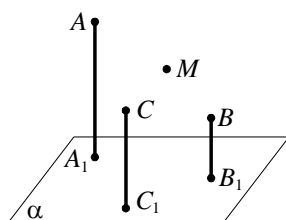


Рис. 50

58. Параллелограмм $A_1 B_1 C_1 D_1$ — изображение параллелограмма $ABCD$, в котором $AB = BD$. Постройте изображение высоты параллелограмма, опущенной из вершины D на сторону BC .

59. Треугольник $A_1 B_1 C_1$ — изображение прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с гипотенузой AB . Постройте изображение прямоугольника $MNKP$, если $N \in AC$, $K \in BC$, $M \in AB$, $P \in AB$, $AM : MP = 1 : 2$.

60. Треугольник $A_1 B_1 C_1$ — изображение равностороннего треугольника ABC . Постройте изображение равностороннего треугольника $B_1 C_1 D_1$, лежащего в плоскости ABC .

Вариант 2

- 61.** Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение равнобедренного треугольника ABC с основанием AC , $AB : AC = 3 : 2$. Постройте изображение центра окружности, вписанной в треугольник ABC .
- 62.** Точки A_1 , B_1 и C_1 — параллельные проекции точек A , B и C на плоскость α (рис. 50). Постройте проекцию на плоскость α точки M , лежащей в плоскости ABC .

Основные понятия стереометрии.

Аксиомы стереометрии

1. Изобразите: плоскость γ , проходящую через прямую b ; точку D , принадлежащую прямой b ; точку F , не принадлежащую плоскости γ ; прямую a , проходящую через точку F и пересекающую плоскость γ в точке D . Запишите с помощью соответствующих символов утверждение:
 - 1) плоскость γ проходит через прямую b ;
 - 2) точка D принадлежит плоскости γ ;
 - 3) точка F не принадлежит плоскости γ ;
 - 4) прямая a пересекает плоскость γ в точке D .

2. Сколько плоскостей можно провести через точки P , O и D , если:

- 1) $PO = 12$ см, $PD = 21$ см, $OD = 17$ см;
- 2) $PO = 10$ см, $PD = 34$ см, $OD = 24$ см?

3. Прямоугольник $ABCD$ и треугольник ABE не лежат в одной плоскости (рис. 65). На отрезке AD отметили точку M , а на отрезке BC — точку K так, что $AM : MD = CK : BK = 1 : 4$. Постройте:

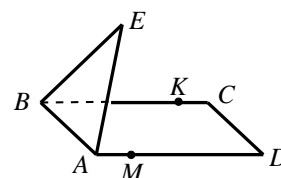


Рис. 65

- 1) линию пересечения плоскостей MEK и ABC ;
- 2) точку пересечения прямой MK с плоскостью ABE .

4. Плоскости α и β пересекаются по прямой m . Плоскость γ пересекает плоскости α и β соответственно по прямым a и b , пересекающимся в точке A . Докажите, что точка A принадлежит прямой m .
5. Вершина A треугольника ABC принадлежит плоскости α , а вершины B и C ей не принадлежат. Прямая BC пересекает плоскость α в точке D , а продолжение медианы CM — в точке N . Докажите, что точки A , D и N лежат на одной прямой.
6. Основания высот непрямоугольного треугольника принадлежат плоскости α . Докажите, что вершины данного треугольника принадлежат плоскости α .

Следствия из аксиом стереометрии

7. Плоскости α и β пересекаются по прямой c . Докажите, что существует плоскость, отличная от плоскостей α и β , содержащая прямую c .
8. Прямоугольник $ABCD$ лежит в плоскости α . Точка O — центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$. Точка M не принадлежит плоскости α . Можно ли провести плоскость через прямую BM и точки O и D ?
9. Прямые a и b , b и c , a и c пересекаются, и точки их пересечения не совпадают. Докажите, что прямые a , b и c лежат в одной плоскости.
10. Вершины A и B четырёхугольника $ABCD$ лежат по одну сторону от плоскости α , а вершины C и D — по другую сторону. Докажите, что точка пересечения диагоналей и точки пересечения сторон BC и AD четырёхугольника с плоскостью α лежат на одной прямой.

Пространственные фигуры.

Начальные сведения о многогранниках

11. Точки M и K — середины рёбер AC и BC пирамиды $SABC$ соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью SMK .
12. На рёбрах AB и SB пирамиды $SABC$ отметили соответственно точки M и K (рис. 66). Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ASC , если прямые MK и SA не параллельны.
13. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки: 1) B, D и C_1 ; 2) A, C и середину ребра DD_1 .

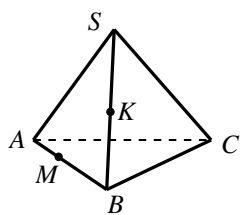


Рис. 66

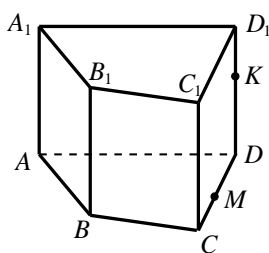


Рис. 67

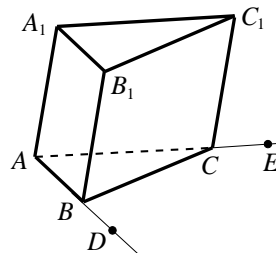


Рис. 68

14. Дана призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 67). Точка M принадлежит ребру CD , точка K — ребру DD_1 . Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью $A_1 B_1 C_1$.
15. Дана призма $ABCA_1 B_1 C_1$ (рис. 68). Точка D принадлежит прямой AB , точка E — прямой AC . Постройте сечение призмы плоскостью $A_1 DE$.
16. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ (рис. 69) плоскостью, проходящей через точки D, E и F , принадлежащие рёбрам SA, SB и BC соответственно.
17. Постройте сечение призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ (рис. 70) плоскостью, проходящей через точку B_1 и точки M и K , лежащие на рёбрах AC и AA_1 соответственно.

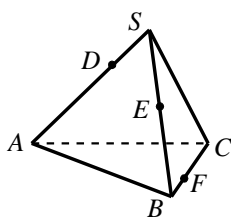


Рис. 69

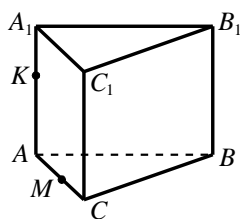


Рис. 70

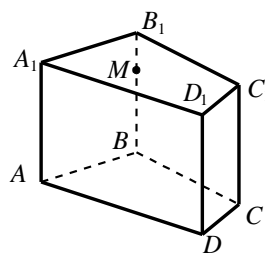


Рис. 71

18. Постройте сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 71) плоскостью, проходящей через вершины A и D_1 и точку M ребра BB_1 .

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

19. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 72). Укажите его рёбра:

- 1) параллельные ребру $A_1 B_1$;
- 2) скрещивающиеся с ребром $A_1 B_1$.

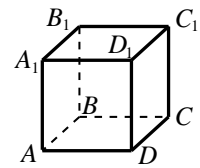


Рис. 72

20. Прямые AB и CD — скрещивающиеся. Докажите, что прямые AC и BD также скрещивающиеся.

21. На одной из двух параллельных прямых выбрали точку и через неё провели прямую, которая пересекает другую. Докажите, что эти три прямые лежат в одной плоскости.

22. Через вершину B непрямоугольного треугольника ABC проведена прямая b , не принадлежащая плоскости треугольника. Докажите, что прямая b и прямая, содержащая высоту треугольника ABC , проведённую из вершины A , — скрещивающиеся.

23. Через конец C отрезка CD проведена плоскость β . На отрезке CD отметили точку M и провели через неё прямую, пересекающую плоскость β в точке M_1 .

- 1) Постройте точку D_1 пересечения плоскости β с прямой, проходящей через точку B и параллельной прямой MM_1 .
- 2) Найдите отрезок MM_1 , если $CM : MD = 1 : 4$, $DD_1 = 20$ см.

24. На отрезке MK , который не пересекает плоскость γ , отметили точку P . Через точки M , K и P провели параллельные прямые, пересекающие плоскость γ в точках M_1 , K_1 и P_1 соответственно.

- 1) Докажите, что точки M_1 , K_1 и P_1 лежат на одной прямой.
- 2) Найдите отрезок PK , если $MP = 24$ см, $M_1 P_1 = 6$ см, $P_1 K_1 = 8$ см.

25. Треугольник ABC не имеет общих точек с плоскостью α . Точки M и N — середины отрезков AC и BC соответственно, точка K — середина отрезка MN (рис. 73). Через точки A , B , C , M , N и K провели параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 , B_1 , C_1 , M_1 , N_1 и K_1 соответственно. Найдите отрезок KK_1 , если $AA_1 = 7$ см, $BB_1 = 9$ см, $CC_1 = 15$ см.

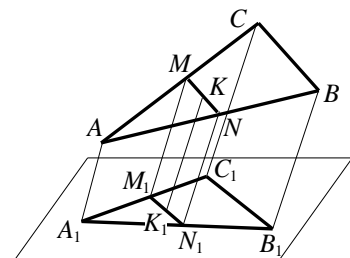


Рис. 73

Параллельность прямой и плоскости

26. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 74). Плоскостям каких граней куба параллельна прямая BC ?

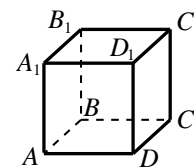


Рис. 74

27. Прямая a параллельна плоскости α . Существуют ли в плоскости α прямые, не параллельные прямой a ?

28. Точка M не принадлежит плоскости трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$).

Точки E и F — середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что прямая BC параллельна плоскости MEF .

29. Точка O не принадлежит плоскости параллелограмма $ABCD$, точки M, N, P и K — середины отрезков BC, OM, AD и OP соответственно. Докажите, что $KN \parallel AB$.

30. Через середину M боковой стороны AB трапеции $ABCD$ проведена плоскость, параллельная основаниям BC и AD и пересекающая боковую сторону CD в точке N . Докажите, что отрезок MN — средняя линия трапеции.

31. Плоскость, параллельная стороне BC треугольника ABC , пересекает стороны AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно, причём $AB_1 : BB_1 = 5 : 3$. Найдите отрезок $B_1 C_1$, если $BC = 6$ см.

32. Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 75). Вне плоскости треугольника выбрали точку D . На отрезке MD отметили точку E так, что $ME : ED = 5 : 2$. Постройте точку F пересечения плоскости BEC и прямой DN и найдите отрезок EF , если $BC = 30$ см.

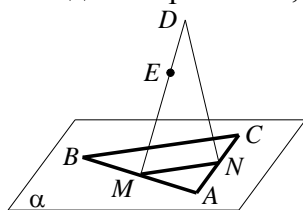


Рис. 75

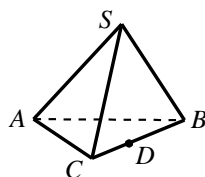


Рис. 76

33. На ребре SA тетраэдра $SABC$ отметили точку D . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки B и D и параллельной прямой AC .

34. Постройте сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, которая проходит через точки E и F , принадлежащие соответственно рёбрам $A_1 D_1$ и $B_1 C_1$, и параллельна прямой AA_1 .

35. Постройте сечение пирамиды $SABC$ (рис. 76) плоскостью, которая проходит через точку D на ребре BC и параллельна прямым AC и SB .

36. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, которая проходит через точки D и E , принадлежащие соответственно рёбрам BC и BS , и параллельна прямой AC .

37. Постройте точку пересечения с плоскостью нижнего основания треугольной призмы прямой, проходящей через две точки, одна из которых принадлежит боковой грани призмы, а другая — ребру верхнего основания, которое не принадлежит этой грани.

38. Постройте точку пересечения с плоскостью нижнего основания четырёхугольной призмы прямой, проходящей через две точки, принадлежащие двум противоположным боковым граням призмы.

Параллельность плоскостей

39. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ параллельны плоскости α . Докажите, что прямая CD параллельна плоскости α .
40. Плоскости α и β параллельны. В плоскости α выбраны точки K и P , а в плоскости β — точки K_1 и P_1 такие, что прямые KK_1 и PP_1 параллельны. Найдите отрезки KP и PP_1 , если $K_1P_1 = 13$ см, $KK_1 = 19$ см.
41. Плоскости α и β параллельны, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$, $E \in \beta$, $F \in \beta$, $CE \parallel DF$, $CD = 2\sqrt{3}$ см, $DF = 3$ см, $\angle CEF = 150^\circ$. Найдите отрезок CF .
42. Стороны AB и BC треугольника ABC параллельны плоскости γ . Через точки A и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость γ в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что четырёхугольник ACC_1A_1 — параллелограмм.
43. Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α . Плоскость β параллельна плоскости α и пересекает стороны AC и BC в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите отрезок A_1B_1 , если $AB = 12$ см, $CB_1 : B_1B = 2 : 3$.
44. Плоскости α и β параллельны. Через прямую a плоскости α проведены плоскости γ_1 и γ_2 , пересекающие плоскость β по прямым b_1 и b_2 соответственно. Докажите, что $b_1 \parallel b_2$.
45. Плоскости α и β параллельны. Через точку D , находящуюся между этими плоскостями, проведены две прямые. Одна из них пересекает плоскости α и β в точках E_1 и F_1 , а другая — в точках E_2 и F_2 соответственно. Найдите угол DE_1E_2 , если $\angle E_1DE_2 = 28^\circ$, $\angle DF_2F_1 = 65^\circ$.
46. Плоскости α и β параллельны. Из точки O , не принадлежащей этим плоскостям и не находящейся между ними, проведены два луча. Один из них пересекает плоскости α и β в точках M_1 и K_1 , а другой — в точках M_2 и K_2 соответственно, точка M_1 лежит между точками O и K_1 . Найдите отрезок OK_1 , если $OM_1 = 8$ см, $K_1K_2 = 6$ см, $M_1M_2 = M_1K_1$.
47. Точки M , N и K — середины рёбер AB , AD и A_1B_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку K и прямую MN .
48. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6 см. Точка M — середина ребра BB_1 . Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через точку M и параллельна плоскости AB_1C , и вычислите периметр сечения.
49. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отметили точку F так, что $AF : FA_1 = 1 : 4$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку F и параллельной плоскости B_1CD_1 . Найдите периметр построенного сечения, если $AA_1 = 30$ см, $AB = 40$ см, $AD = 18$ см.
50. На рёбрах AA_1 , CC_1 и DD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отметили соответственно точки E , F и P (рис. 77). Постройте сечение куба плоскостью EFP .
51. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, которая проходит через точки K , E и F , принадлежащие соответственно рёбрам AD , AA_1 и C_1D_1 .

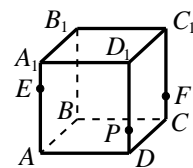


Рис. 77

Преобразование фигур в пространстве.

Параллельное проектирование

52. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 78). При некотором параллельном переносе образом точки C является точка D . Какая фигура при данном параллельном переносе является образом:

- 1) точки B_1 ; 2) отрезка BC ; 3) отрезка BC_1 ?

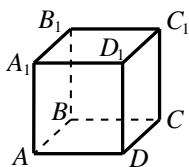


Рис. 78

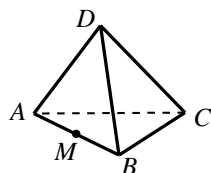


Рис. 79

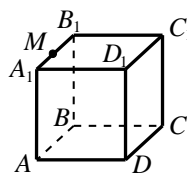


Рис. 80

53. На рисунке 79 изображён тетраэдр $DABC$, точка M — середина ребра AB . Постройте образ данного тетраэдра при параллельном переносе, в результате которого:

- 1) образом точки C является точка D ;
2) образом точки D является точка M .

54. На рисунке 80 изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, на ребре $A_1 B_1$ которого отметили точку M . Постройте образ данного куба при симметрии относительно: 1) вершины D ; 2) точки M .

55. Может ли быть параллельной проекцией прямоугольника четырёхугольник $A_1 B_1 C_1 D_1$, углы которого A_1 , B_1 , C_1 и D_1 соответственно равны 90° , 90° , 40° и 140° ?

56. В каком случае параллельной проекцией угла является:

- 1) луч;
2) угол, равный данному углу?

57. Треугольник $A_1 B_1 C_1$ является изображением равностороннего треугольника ABC , точка F_1 — изображение некоторой точки F отрезка BC (рис. 81). Постройте изображения прямых, проходящих через точку F и перпендикулярных сторонам AB и BC .

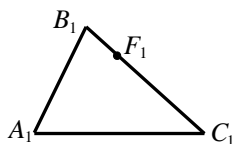


Рис. 81

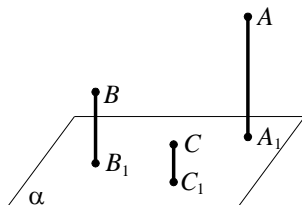


Рис. 82

58. Параллелограмм $A_1 B_1 C_1 D_1$ — изображение ромба $ABCD$, в котором $\angle ABC = 120^\circ$. Постройте изображение высоты ромба, опущенной из вершины D на сторону BC .

59. Треугольник $A_1 B_1 C_1$ — изображение прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с гипотенузой AB . Постройте изображение квадрата $CDEF$, если $D \in AC$, $E \in AB$, $F \in BC$.

60. Треугольник $A_1 B_1 C_1$ — изображение равнобедренного треугольника ABC с основанием AC . Постройте изображение прямоугольника $ADEC$, если $B \in DE$.

- 61.** Трапеция $A_1B_1C_1D_1$ — изображение трапеции $ABCD$, в которой $AB = CD = AD$, $BC < AD$. Постройте изображение центра окружности, касающейся боковых сторон и большего основания трапеции $ABCD$.
- 62.** Точки A_1 , B_1 и C_1 — параллельные проекции точек A , B и C на плоскость α (рис. 82). Постройте точку пересечения прямой, содержащей медиану треугольника ABC , проведенную из вершины A , с плоскостью α .