От авторов

Данное методическое пособие адресовано учителям, работающим по учебнику «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» авторов А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полонского, М. С. Якира.

Цель пособия — помочь учителю наиболее эффективно организовывать, осуществлять и контролировать учебный процесс на уроках алгебры и начал математического анализа в 10 классе.

В разделе «**Примерное поурочное планирование учебного материала**» представлено распределение учебного времени по изучаемым темам с учётом часов, выделенных на контрольные работы.

Раздел «**Методические рекомендации по организации учебной деятельности**» состоит из технологических карт по каждой теме курса, за исключением контрольных работ. В технологической карте обозначены планируемые результаты, основные понятия, изучаемые на уроке, примерные задания для каждого урока данной темы, а также даны методические комментарии к тексту соответствующего параграфа учебника и некоторым упражнениям. Задания для формирования предметных результатов, дополнительные задания, задания для повторения, задания для домашней работы указаны из учебника «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др.; задания для контроля и коррекции предметных результатов указаны из пособия «Дидактические материалы. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др. Дополнительные задания можно использовать для индивидуальной, парной или групповой работы учащихся, а также во внеурочной деятельности.

Технологические карты являются эффективной помощью учителю для организации учебной деятельности, при этом нужно учитывать, что выполнение объёма заданий на уроке и дома должно корректироваться учителем в зависимости от уровня математической подготовки учащихся.

Раздел «**Контрольные работы**» состоит из 8 контрольных работ в соответствии с планированием учебного материала. Каждая работа содержит 4 варианта. Такой обширный материал поможет учителю организовать объективный и эффективный контроль знаний.

В разделе «**Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся**» представлены методы контроля в учебном процессе.

В разделе «**Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся**» *предлагаем технологическую карту урока, на котором используются ИКТ.*

В раздел «**Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся**» включены технологические карты организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности, критерии оценки этой деятельности.

Примерное поурочное планирование учебного материала

I вариант: 3 часа в неделю, всего 105 часов
II вариант: 4 часа в неделю, всего 140 часов

Номер параграфа	Номер урока		Содержание учебного материала	Количество часов	
	I вариант	II вариант		I вариант	II вариант
			Глава 1. Повторение и расширение сведений о функции	**12**	**14**
1	1—3	1—3	Наибольшее и наименьшее значения функции. Чётные и нечётные функции	3	3
2	4	4	Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований	1	1
3	5, 6	5—7	Обратная функция	2	3
4	7, 8	8—10	Равносильные уравнения и неравенства	2	3
5	9—11	11—13	Метод интервалов	3	3
	12	14	Контрольная работа № 1	1	1
			Глава 2. Степенная функция	**19**	**23**
6	13	15	Степенная функция с натуральным показателем	1	1
7	14, 15	16, 17	Степенная функция с целым показателем	2	2
8	16, 17	18, 19	Определение корня n-й степени. Функция $y = \sqrt[n]{x}$	2	2

Продолжение

Номер параграфа	Номер урока		Содержание учебного материала	Количество часов	
	I вариант	II вариант		I вариант	II вариант
9	18—20	20—23	Свойства корня n-й степени	3	4
	21	24	Контрольная работа № 2	1	1
10	22, 23	25, 26	Определение и свойства степени с рациональным показателем	2	2
11	24—26	27—30	Иррациональные уравнения	3	4
12	27, 28	31—33	Метод равносильных преобразований для решения иррациональных уравнений	2	3
13	29, 30	34—36	Иррациональные неравенства	2	3
	31	37	Контрольная работа № 3	1	1
Глава 3. Тригонометрические функции				**29**	**35**
14	32, 33	38, 39	Радианная мера угла	2	2
15	34, 35	40, 41	Тригонометрические функции числового аргумента	2	2
16	36, 37	42, 43	Знаки значений тригонометрических функций. Чётность и нечётность тригонометрических функций	2	2
17	38	44	Периодические функции	1	1

18	39, 40	45—47	Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$	2	3
19	41, 42	48—50	Свойства и графики функций $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$	2	3
	43	51	Контрольная работа № 4	1	1
20	44—46	52—55	Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента	3	4
21	47—49	56—58	Формулы сложения	3	3
22	50, 51	59, 60	Формулы приведения	2	2
23	52—55	61—65	Формулы двойного и половинного углов	4	5
24	56, 57	66—68	Сумма и разность синусов (косинусов)	2	3
25	58, 59	69—71	Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму	2	3
	60	72	Контрольная работа № 5	1	1
Глава 4. Тригонометрические уравнения и неравенства				**15**	**22**
26	61, 62	73—75	Уравнение $\cos x = b$	2	3
27	63, 64	76—78	Уравнение $\sin x = b$	2	3
28	65	79—81	Уравнения $\mathrm{tg}\, x = b$ и $\mathrm{ctg}\, x = b$	1	3
29	66, 67	82—84	Функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$ и $y = \mathrm{arcctg}\, x$	2	3

2184020o1.indd 7 18.08.2017 11:49:33

Окончание

Номер пара-графа	Номер урока		Содержание учебного материала	Количество часов	
	I вариант	II вариант		I вариант	II вариант
30	68—70	85—87	Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим	3	3
31	71, 72	88—90	Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители	2	3
32	73, 74	91—93	Решение простейших тригонометрических неравенств	2	3
	75	94	Контрольная работа № 6	1	1
Глава 5. Производная и её применение				**26**	**32**
33	76, 77	95—97	Представление о пределе функции в точке и о непрерывности функции в точке	2	3
34	78	98	Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции	1	1
35	79—81	99—101	Понятие производной	3	3
36	82—84	102—104	Правила вычисления производных	3	3
37	85—87	105—108	Уравнение касательной	3	4
	88	109	Контрольная работа № 7	1	1
38	89, 90	110—112	Признаки возрастания и убывания функции	2	3

39	91—93	113—116	Точки экстремума функции	3	4
40	94—96	117—120	Применение производной при нахождении наибольшего и наименьшего значений функции	3	4
41	97—100	121—125	Построение графиков функций	4	5
	101	126	Контрольная работа № 8	1	1
Повторение и систематизация учебного материала				**4**	**23**
	102—104	127—139	Повторение и систематизация учебного материала за курс геометрии	3	22
	105	140	Итоговая контрольная работа	1	1

Методические рекомендации по организации учебной деятельности

Глава 1. Повторение и расширение сведений о функции

§ 1. Наибольшее и наименьшее значения функции. Чётные и нечётные функции

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения находить наибольшее и наименьшее значения функции для функций, заданных графически и аналитически, исследовать функцию на чётность и нечётность. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умения соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится находить наибольшее и наименьшее значения функции для функций, заданных графически и аналитически, исследовать функцию на чётность и нечётность.
Основные понятия	Наибольшее значение функции, наименьшее значение функции, чётная функция, нечётная функция, свойства чётной функции, свойства нечётной функции.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.7, 1.8, 1.9		1.37, 1.38		1.2, 1.6, 1.10, 1.39, 1.47
2	1.11, 1.13, 1.15, 1.17, 1.18, 1.20, 1.22	1.24	1.40, 1.41, 1.48, 1.49		1.12, 1.14, 1.16, 1.19, 1.21, 1.23

Окончание

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
3	1.26, 1.28, 1.32, 1.33, 1.35	1.29, 1.30	1.42, 1.43, 1.50	№ 3, 6, 9 (1, 3, 5, 7)	1.27, 1.31, 1.34, 1.36, 1.51

Методические комментарии

В начале учебного года учащимся требуется некоторое время для того, чтобы «войти в работу». Поэтому перед изучением этого параграфа целесообразно повторить определение функции, способы задания функции, а также некоторые характеристики функций (нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастание и убывание функции), изученные в курсе алгебры.

Вводя понятия наибольшего и наименьшего значений функции, важно подчеркнуть, что эти характеристики непременно надо связывать с некоторым множеством. Обозначения типа $\max f(x)$ или $\min f(x)$, в которых не указано соответствующее множество, являются некорректными.

Следует обратить внимание учащихся, что в определении наибольшего и наименьшего значений функции фигурируют нестрогие неравенства $f(x_0) \geqslant f(x)$ и $f(x_0) \leqslant f(x)$. Замена этих неравенств строгими привела бы к тому, что многие функции перестали бы достигать наибольших (наименьших) значений. Например, функция $f(x) = x^2$ на множестве $M = [-1; 1]$ своего наибольшего значения, равного 1, не достигала бы, потому что $f(1) = f(1) = 1$. Для наглядности следует сопроводить изложение материала примерами графиков функций. Также в качестве иллюстрации желательно привести примеры функций, являющихся константами на некотором промежутке.

В учебнике приняты такие определения чётной и нечётной функций, в которых в явном виде не указано, что область определения функции должна быть симметричной относительно начала координат. Этот факт следует из того, что равенство $f(-x) = f(x)$ (либо $f(-x) = -f(x)$) выполняется для любого x из области определения функции.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно показать, что функция $f(x) = 0$, $D(f) = \boldsymbol{R}$ — единственная функция, одновременно являющаяся и чётной, и нечётной.

2184020o1.indd 11 18.08.2017 11:49:34

№ 1.26. Пусть $f(0) = a$. Поскольку f — нечётная функция, то $f(-0) = -a$. Но $f(-0) = f(0)$. Получим, что $f(0) = a$ и $f(0) = -a$, т. е. $a = -a$. Отсюда $a = 0$.

№ 1.27. Заметим, что если число $x_0 \neq 0$ является нулём чётной функции, то число $-x_0$ также является её нулём. Следовательно, все нули чётной функции, не равные 0, можно разбить на пары, а значит, таких нулей чётное количество. Единственная возможность, при которой количество нулей чётной функции будет нечётным, — это наличие нуля функции $x_0 = 0$. Значит, $f(0) = 0$.

§ 2. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований

Технологическая карта урока

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение строить графики функций $y = f(kx)$ и $y = f(kx + a) + b$, если известен график функции $y = f(x)$.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умения соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится строить графики функций $y = f(kx)$ и $y = f(kx + a) + b$, если известен график функции $y = f(x)$.

Основные понятия

Построение графика функции $y = f(kx)$, сжатие графика функции $y = f(x)$ в k раз к оси ординат, растяжение графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз к оси ординат, построение графика функции $y = f(-x)$, симметрия относительно оси ординат.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	2.1, 2.3, 2.5, 2.7	2.9	2.11, 2.12	№ 19 (1—3), 21	2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 2.13, 2.14

Методические комментарии

Правила построения графиков функций, сформулированные в параграфе, основаны на том, что между точками графиков функций $y = f(x)$ и $y = f(kx)$ установлено взаимно однозначное соответствие.

Построение графика функции $y = f(kx)$, где $k < 0$, можно разделить на два этапа: построение графика функции $y = f(|k|\,x)$, а затем построение графика функции $y = f(-|k|\,x)$ с использованием симметрии относительно оси ординат. Соответствующие этапы построения следует проиллюстрировать рисунками.

При построении графика функции $y = f(kx + b)$ учащиеся допускают наиболее распространённую ошибку: строят график функции $y = f(kx)$, а затем выполняют его параллельный перенос на $|b|$ единиц вдоль оси абсцисс. В параграфе рассмотрен пример 1, который помогает профилактике ошибок подобного рода.

Существуют две основные схемы построения графика функции $y = f(kx + b)$:

1) $y = f(x) \to y = f(x + b) \to y = f(kx + b)$;

2) $y = f(x) \to y = f(kx) \to y = f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$.

Комментарии к упражнениям

№ 2.5—2.10. Целесообразно оформить решение этих задач так, как показано в примерах 1 и 2 параграфа.

№ 2.5, 2.6. Наиболее трудным для учащихся является преобразование гиперболы. При необходимости класс таких задач можно расширить.

§ 3. Обратная функция

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятиями обратимой функции, взаимно обратных функций; применять свойства взаимно обратных функций; находить функцию, обратную данной. ***Личностные:*** формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные:*** формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.

Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями обратимой функции, взаимно обратных функций; применять свойства взаимно обратных функций; находить функцию, обратную данной.
Основные понятия	Обратимая функция, взаимно обратные функции, свойство взаимно обратных функций, обратная функция.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	3.1, 3.3, 3.4, 3.6		3.14, 3.15		3.2, 3.5, 3.7
2	3.8, 3.10, 3.12, 3.13		3.16, 3.17	№ 27, 28	3.9, 3.11, 3.18

Методические комментарии

Эта тема является традиционно сложной для учащихся. Поэтому перед её изучением советуем выполнить упражнения 2.13 и 2.14.

При отработке определения обратимой функции следует предложить учащимся привести примеры как обратимых функций, так и функций, не являющихся обратимыми.

В теореме 3.1 сформулировано достаточное условие обратимости. Заметим, что монотонность функции не является необходимым условием (пример, иллюстрирующий это, приведён на рис. 3.7 (*в*) учебника).

При формировании понятия взаимно обратных функций учащиеся должны в первую очередь понять, что если в упорядоченных парах вида $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, f — обратимая функция, поменять компоненты местами, т. е. получить упорядоченные пары вида $(y_0; x_0)$, то тем самым будет получена функция, обратная данной.

Определение, приведённое в тексте параграфа, формализует смену мест компонентов упорядоченных пар.

Замена (перестановка) компонентов упорядоченных пар также помогает разъяснить, почему при поиске функции, обратной данной, следует независимую переменную выражать через зависимую. Для того чтобы переход к традиционным обозначениям зависимой и независимой переменных воспринимался учащимися естественно, можно предложить им выполнить следующие упражнения: задайте описательно функции, которые заданы следующими формулами: $a = \frac{b+1}{2}$, $m = \frac{n+1}{2}$.

Теорему 3.3 можно сопроводить более наглядными разъяснениями: преобразование симметрии графика монотонной функции относительно прямой $y = x$ не меняет характер монотонности функции.

Комментарии к упражнениям

№ 3.12. Заметим, что в условии задачи ограничение $k \neq 0$ является обязательным. Если $k = 0$, то линейная функция не является обратимой.

§ 4. Равносильные уравнения и неравенства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения определять равносильные преобразования уравнений и неравенств, оперировать понятиями уравнения-следствия и неравенства-следствия.

Личностные: развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы.

Метапредметные: формировать умение выдвигать гипотезы при решении задачи и понимание необходимости их проверки.

Планируемые результаты

Учащийся научится определять равносильные преобразования уравнений и неравенств, оперировать понятиями уравнения-следствия и неравенства-следствия.

Основные понятия

Область определения уравнения, равносильные уравнения, уравнение-следствие, посторонние корни уравнения, равносильные неравенства, неравенство-следствие.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	4.1, 4.3, 4.4, 4.5			—	4.2, 4.6
2	4.7, 4.9, 4.11		4.13	№ 30 (7—10), 31 (4, 6, 8), 32 (2, 4, 6)	4.8, 4.10, 4.12

Методические комментарии

В первую очередь хотелось бы прокомментировать устоявшуюся традицию, которой придерживается немало учителей: требовать от учащихся в начале решения уравнения (неравенства) находить и записывать ОДЗ (область допустимых значений). Ничего плохого в этом нет. Вопрос лишь в том, насколько эффективным является это действие. Ведь то, что найденное решение входит в ОДЗ, ещё не гарантирует того, что оно не является посторонним для данного уравнения (неравенства). Кроме того, поиск ОДЗ сам по себе может оказаться задачей, сопоставимой по сложности с решением уравнения (неравенства). В учебнике не вводится понятие ОДЗ. Вместо этого понятия рассматривается область определения уравнения (неравенства).

Следует разъяснить учащимся, что существует два основных подхода к решению уравнений (неравенств): метод равносильных переходов и метод следствий.

Важно, чтобы учащиеся понимали, какие преобразования уравнений (неравенств) сохраняют равносильность, а какие — нарушают. Также следует разъяснить, в каких случаях целесообразно решать уравнение методом следствий. Именно при решении уравнений методом следствий знание области допустимых значений (ОДЗ) может облегчить проверку решений.

Комментарии к упражнениям

№ 4.1 (10), 4.5 (4), 4.10 (1). Эти примеры показывают, что такие «опасные» операции, как деление на выражение с переменными, расширение области определения уравнения и т. п., не обязательно приводят к нарушению равносильности.

§ 5. Метод интервалов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение решать неравенства методом интервалов. ***Личностные:*** развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы. ***Метапредметные:*** формировать умение развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.
Планируемые результаты	Учащийся научится решать неравенства методом интервалов.

Основные понятия Непрерывная кривая, непрерывная в каждой точке области определения функция, разрыв функции в точке, теорема о непрерывной функции на промежутке, метод интервалов, теорема о непрерывности функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	5.1, 5.3, 5.5				5.2, 5.4, 5.6
2	5.7, 5.9, 5.10, 5.12, 5.13, 5.15		5.26		5.8, 5.11, 5.14, 5.16
3	5.17, 5.19, 5.21	5.23, 5.25	5.27	№ 36 (1, 4), 40, 43 (3)	5.18, 5.20, 5.22

Методические комментарии

На этом этапе изучения математики учащиеся ещё не обладают достаточной теоретической базой для обоснования метода интервалов. Однако факты и понятия, лежащие в основе этого метода, интуитивно понятны и наглядно очевидны. Сказанное в первую очередь относится к понятию непрерывности функции и содержанию теоремы 5.1.

Обоснование метода интервалов с помощью следствия из первой теоремы Больцано — Коши позволяет решать достаточно широкий класс неравенств, не только сводящихся к исследованию знака выражения вида $(x - a_1)(x - a_2) \cdot ... \cdot (x - a_n)$.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить им, что благодаря методу интервалов задача о решении неравенства перестаёт носить автономный характер. Вопрос лишь сводится к тому, можно ли найти корни соответствующего уравнения.

Особое внимание следует уделить решению нестрогих неравенств. Переход к совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ f(x) = 0 \end{array}\right.$ при решении неравенств вида $f(x) \geqslant 0$ может уберечь от потери решений.

Комментарии к упражнениям

№ 5.9 (4, 6), 5.12 (3, 6), 5.16 (2, 3), 5.18 (2, 4), 5.21 (7, 8), 5.22 (2, 4). При решении этих задач типичной ошибкой является потеря решения, равного значению переменной, обращающей левую часть неравенства в нуль.

№ 5.23. Данное неравенство равносильно неравенству $\frac{x}{x^2 - 9} \geqslant 0$.

Контрольная работа № 1

Глава 2. Степенная функция

§ 6. Степенная функция с натуральным показателем

Технологическая карта урока

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения распознавать степенную функцию с натуральным показателем, строить график степенной функции с натуральным показателем, применять её свойства при решении задач. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умения определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится распознавать степенную функцию с натуральным показателем, строить график степенной функции с натуральным показателем, применять её свойства при решении задач..
Основные понятия	Степенная функция с натуральным показателем, свойства степенной функции с чётным показателем, свойства степенной функции с нечётным показателем.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	6.1, 6.3, 6.5, 6.7, 6.9, 6.11, 6.13	6.15, 6.17, 6.19, 6.21	6.22, 6.23	№ 49, 52 (3), 54	6.2, 6.4, 6.6, 6.8, 6.10, 6.12, 6.14

Методические комментарии

Поскольку учащиеся знакомы с частными видами этой функции, то им хорошо понятно, почему при исследовании функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, надо отдельно рассматривать два случая: n — чётное натуральное число и n — нечётное натуральное число.

Следует разъяснить учащимся: на основании того, что выражение x^{2k}, $k \in \boldsymbol{Z}$, принимает только неотрицательные значения, ещё не следует делать вывод, что областью значений степенной функции $y = x^{2k}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, являются все неотрицательные числа. Соответствующее замечание можно сделать и при поиске области значений функции $y = x^{2k+1}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

При исследовании свойств функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, для случая, когда n — нечётное натуральное число, показатель степени представлен в виде $n = 2k + 1$. Это означает, что доказательство не рассматривает случай $n = 1$, т. е. функцию $y = x$. В зависимости от возможностей класса следует либо сослаться на свойства этой функции, изученные в предыдущих классах, либо предложить учащимся проверить самостоятельно, что свойства, которые далее доказываются для случая $n = 2k + 1$, выполняются для случая $n = 1$.

В зависимости от возможностей класса можно разъяснить, как по отношению друг к другу расположены графики функций $y = x^n$, $x > 0$, при различных натуральных значениях n. Однако иллюстративное сопровождение этого материала имеет определённые трудности.

Используя лишь тетрадный лист в клетку, сложно увидеть разницу, например, между графиками функций $y = x^3$ и $y = x^5$. Здесь может помочь традиционный метод — построение графика на миллиметровой бумаге — либо более современный — использование соответствующих компьютерных программ. В зависимости от возможностей класса на уроке информатики можно использовать построение графиков по точкам на основании таблицы, созданной в *Word* или редакторе таблиц; с использованием специализированных математических пакетов.

Учащимся со склонностью к изучению информатики можно предложить самостоятельно начать разработку программы для построения графиков на экране компьютера, которую по мере изучения аппарата исследования функций они смогут развивать и совершенствовать.

Комментарии к упражнениям

№ 6.3—6.6. При решении этих задач учащиеся должны апеллировать к чётности (нечётности) соответствующей функции, а также использовать её характер монотонности.

№ 6.7, 6.8. Эти задачи носят пропедевтический характер для введения понятия корня n-й степени, а пример 6.7 (2), кроме того, — для рассмотрения свойств корня n-й степени.

§ 7. Степенная функция с целым показателем

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения распознавать степенную функцию с целым показателем, строить график степенной функ-

ции с целым показателем, применять её свойства при решении задач.

Личностные: формировать умение объективно оценивать свой труд.

Метапредметные: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты Учащийся научится распознавать степенную функцию с целым показателем, строить график степенной функции с целым показателем, применять её свойства при решении задач.

Основные понятия Степенная функция с целым показателем, свойства степенной функции с целым показателем.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	7.1, 7.3, 7.5, 7.7		7.19, 7.20		7.2, 7.4, 7.6, 7.21
2	7.8, 7.10, 7.11, 7.12, 7.14, 7.16	7.18	7.22	№ 61, 62, 65	7.9, 7.13, 7.15, 7.17, 7.23

Методические комментарии

После изучения материала предыдущего параграфа свойства степенной функции с целым показателем воспринимаются, как правило, без затруднений. Сложности могут возникнуть при рассмотрении асимптотического поведения графика функции. В связи с этим целесообразно повторить с учащимися свойства и график функции $y = \frac{1}{x}$.

Нередко учащиеся, описывая характер монотонности функции $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$, $k \in \boldsymbol{N}$, ошибочно считают, что данная функция является убывающей. На самом деле эта функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Для профилактики этой ошибки следует повторить определение возрастающей (убывающей) функции, подчеркнув, что соотношение между значениями функции должно выполняться при любых значениях аргумента. То, что это соотношение для данной функции выполняется не всегда, следует проиллюстрировать, выбрав два значения аргумента разного знака.

В зависимости от возможностей класса можно разъяснить, как по отношению друг к другу расположены графики функций $y = x^{-n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, при различных значениях n. При иллюстративном сопровождении этого материала следует учесть те же трудности, что и для функции $y = x^n$, и использовать методы, рассмотренные в предыдущем параграфе.

Комментарии к упражнениям

№ 7.3—7.6. При решении этих задач учащиеся должны апеллировать к чётности (нечётности) соответствующей функции, а также использовать её характер монотонности.

№ 7.10, 7.11. Эти задачи служат закреплению понимания учащимися того, что значение 0^0 не определено.

№ 7.10 (1). Искомым графиком является прямая $y = 1$ с «выколотой» точкой (2; 1).

№ 7.11 (2). Графиком уравнения является вся координатная плоскость, за исключением двух прямых $y = 2$ и $x = -1$.

§ 8. Определение корня n-й степени. Функция $y = \sqrt[n]{x}$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	*Предметные:* формировать умения оперировать понятиями корня n-й степени, арифметического корня n-й степени, распознавать и строить график функции $y = \sqrt[3]{x}$. *Личностные:* формировать умение формулировать собственное мнение. *Метапредметные:* формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями корня n-й степени, арифметического корня n-й степени, распознавать и строить график функции $y = \sqrt[3]{x}$, где $n > 1$, $n \in \boldsymbol{N}$.
Основные понятия	Корень n-й степени, знак корня n-й степени, радикал, подкоренное выражение, кубический корень, арифметический корень n-й степени.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.6, 8.8		8.33, 8.34, 8.35		8.5, 8.7, 8.9
2	8.10, 8.12, 8.14, 8.16, 8.18, 8.20	8.22, 8.23, 8.25, 8.27, 8.29, 8.31	8.36, 8.37, 8.38	№ 70 (3, 4), 77, 79, 80 (2)	8.11, 8.13, 8.15, 8.17, 8.19, 8.21

Методические комментарии

Материал этого параграфа обобщает и расширяет понятия квадратного корня и арифметического квадратного корня. Поэтому целесообразно перед изучением этой темы повторить указанные понятия.

После введения определения корня n-й степени отрабатывается понятие корня нечётной степени. Это понятие воспринимается учащимися легче, чем понятие корня чётной степени, по двум причинам: 1) корень нечётной степени существует из любого числа и принимает только одно значение; 2) для корня нечётной степени существует обозначение.

При изучении понятия «квадратный корень» необходимость введения понятия арифметического квадратного корня мотивировалась тем, что квадратный корень из неотрицательного числа принимает два различных значения. Необходимость введения арифметического корня чётной степени также мотивируется существованием двух корней чётной степени, поэтому разница между арифметическим корнем и корнем для чётной степени является достаточно наглядной.

Однако учащиеся должны понимать, что арифметический корень рассматривается для любого натурального $n > 1$, независимо от чётности числа n.

Следует обратить внимание учащихся на то, что запись $\sqrt[2n]{a}$, $n \in \boldsymbol{N}$, используется только для обозначения арифметического корня. Запись $\sqrt[2n+1]{a}$, $n \in \boldsymbol{N}$, может быть использована как для обозначения арифметического корня, когда $a \geqslant 0$, так и для обозначения корня нечётной степени.

Как и при изучении степенной функции с целым показателем, для функции $y = \sqrt[n]{x}$ отдельно рассматриваются случаи, когда n — чётное число и когда n — нечётное.

Исследование свойств и построение графиков функций $y = \sqrt[2k+1]{x}$ и $y = \sqrt[2k]{x}$ основаны на том, что эти функции являются обратными соответственно функциям $y = x^{2k+1}$ и $y = x^{2k}$, где $x \geqslant 0$. Поэтому при изучении этой темы целесообразно повторить свойства взаимно обратных функций и свойства степенной функции с натуральным показателем.

В разобранном примере параграфа рассматривается решение иррациональных неравенств. Метод решения основан на характере монотонности функции $y = \sqrt[n]{x}$. Этот пример и аналогичные задачи параграфа носят пропедевтический характер по отношению к теме «Иррациональные неравенства».

Комментарии к упражнениям

№ 8.16, 8.17. Учащимся интуитивно понятно, как сравнить данные числа. Однако они должны понимать, что сравнение этих чисел основано на том, что функция $y = \sqrt[n]{x}$ является возрастающей.

№ 8.27 (1). Для того чтобы избежать появления постороннего корня, следует записать систему, равносильную данному уравнению: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0, \\ x + 1 = 0, \end{array}\right. \\ x + 1 \geqslant 0. \end{cases}$

В зависимости от возможностей класса решение этого примера можно обобщить, записав, что уравнение $f(x)\sqrt[2n]{g(x)} = 0$ равносильно системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \end{array}\right. \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$ Здесь же целесообразно провести профилактику распространённой ошибки: обнаружив, что $f(x) = 0$, учащиеся считают значение x корнем уравнения, не обращая внимание на знак подкоренного выражения при этом значении x.

№ 8.29 (1). Областью определения данной функции является одноэлементное множество $\{1\}$.

§ 9. Свойства корня n-й степени

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения доказывать свойства корня n-й степени, применять эти свойства для решения задач, преобразовывать выражения, содержащие корни n-й степени. ***Личностные:*** развивать познавательный интерес к математике.

Метапредметные: формировать умения устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты Учащийся научится доказывать свойства корня n-й степени, применять эти свойства для решения задач, преобразовывать выражения, содержащие корни n-й степени.

Основные понятия Свойства корня n-й степени.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	9.1, 9.3, 9.5, 9.6, 9.7, 9.9, 9.11, 9.13		9.51		9.2, 9.4, 9.8, 9.10, 9.12, 9.14
2	9.15, 9.17, 9.19, 9.21, 9.25, 9.29, 9.31	9.23, 9.27,	9.52, 9.53		9.16, 9.18, 9.20, 9.22, 9.26, 9.30
3	9.32, 9.34, 9.36, 9.43, 9.45, 9.47	9.38, 9.39, 9.41, 9.49	9.54	№ 94, 105 (1, 3, 5), 108 (1, 3, 5)	9.33, 9.35, 9.37, 9.44, 9.46, 9.48

Методические комментарии

Теоремы 9.1—9.4 обобщают известные теоремы о свойствах арифметических квадратных корней. Поэтому перед изучением этого параграфа целесообразно повторить свойства арифметических квадратных корней.

В зависимости от возможностей класса наряду с теоремами 9.2 и 9.3 можно рассмотреть следующий факт. Если $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, то $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{-a}\sqrt[2k]{-b}$, $k \in \boldsymbol{N}$; если $a \leqslant 0$ и $b < 0$, то $\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{-a}}{\sqrt[2k]{-b}}$.

Наибольшее количество ошибок учащиеся допускают при вынесении множителя из-под знака корня и особенно при внесении множителя под знак корня. Этим видам задач следует уделить особое внимание.

Учащиеся не всегда понимают (по крайней мере, это не кажется им естественным), почему при вынесении множителя-переменной из-под знака корня перед этой переменной может появится знак «минус». Это надо разъяснить отдельно.

Чаще всего учащиеся делают ошибки при упрощении выражений вида $\sqrt[2n]{-a^{2n+1}}$. Здесь важно подчеркнуть, что в таких случаях множеством допустимых значений переменной являются все неположительные числа.

Ещё одним сложным типом задач для учащихся является преобразование выражений вида $a\sqrt[2n]{b}$ с внесением под корень переменной a. Учащиеся должны понять, что необходимо рассматривать два случая: $a < 0$ и $a \geqslant 0$.

Надо дать возможность учащимся самостоятельно выбрать способ оформления примеров на упрощение выражений: по действиям или цепочкой.

Комментарии к упражнениям

№ 9.32 (4). Заметим, что теорема 9.6 сформулирована для случая, когда $a \geqslant 0$. Чтобы избежать ошибки в данном примере, можно решение оформить так: $\sqrt[6]{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt[3]{\left|\sqrt{3}-2\right|} = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

№ 9.36 (1). Данное уравнение равносильно уравнению $|x| = x - 4$, которое, в свою очередь, равносильно системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = x - 4, \\ x = 4 - x, \end{array}\right. \\ x \geqslant 4. \end{cases}$

№ 9.39 (3). Учащиеся нередко задают вопрос, в чём смысл ограничения $x \neq 0$. Дело в том, что если $x = 0$, то переменная y может принимать любые значения. Если $x \neq 0$, то $y \geqslant 0$. Поэтому выражение $|xy|\sqrt[6]{y}$, записанное в ответе, существует.

№ 9.43 (1). $\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}} = \sqrt[6]{(\sqrt{10}-3)^2}\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}} =$

$= \sqrt[6]{19-6\sqrt{10}}\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}} = \sqrt[6]{19^2-360} = \sqrt[6]{1} = 1.$

Контрольная работа № 2

§ 10. Определение и свойства степени с рациональным показателем

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятием степени с рациональным показателем, доказывать и применять свой-

ства степени с рациональным показателем, преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональным показателем.

Личностные: формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием.

Метапредметные: формировать умения устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты Учащийся научится оперировать понятием степени с рациональным показателем, доказывать и применять свойства степени с рациональным показателем, преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональным показателем.

Основные понятия Степень с рациональным показателем, степенная функция с рациональным показателем, свойства степени с рациональным показателем.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	10.1, 10.3, 10.5, 10.7, 10.9, 10.11, 10.13				10.2, 10.4, 10.6, 10.8, 10.10, 10.12, 10.14
2	10.15, 10.17, 10.19, 10.21, 10.23, 10.25, 10.27		10.29	№ 114 (6, 7), 117 (1—3), 118, 121 (1, 4, 7)	10.16, 10.18, 10.20, 10.22, 10.24, 10.26, 10.28

Методические комментарии

Текст параграфа начинается с повторения основных сведений о степени числа с натуральным и целым показателями. Это сделано не только с целью повторения и закрепления соответствующего материала, но и для того, чтобы определённым образом мотивировать определение степени с рациональным показателем.

Абзац перед определением степени с рациональным показателем учащиеся не должны воспринимать как доказательство того, что $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Важно добиться от учащихся понимания того, что выражение $a^{\frac{m}{n}}$ при $a < 0$ не определено.

Немало ошибок возникает из-за того, что учащиеся отождествляют функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$. Однако эти функции разные, поскольку у них разная область определения. Профилактикой подобной ошибки служит пример, рассмотренный в параграфе.

Поскольку свойства степени с рациональным показателем аналогичны свойствам степени с целым показателем, то теоремы 10.1—10.4 не вызывают затруднений.

Комментарии к упражнениям

№ 10.11, 10.12. Учащиеся должны понимать, почему в условии указано, что переменная принимает только положительные значения.

№ 10.19, 10.20. Учащиеся должны понимать, почему в условии сказано, что переменные принимают неотрицательные значения.

§ 11. Иррациональные уравнения

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение решать иррациональные уравнения методом следствий. ***Личностные:*** формировать способность осознанного выбора и построения дальнейшей индивидуальной траектории. ***Метапредметные:*** формировать умения сравнивать, анализировать, обобщать по разным основаниям, моделировать выбор способов деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится решать иррациональные уравнения методом следствий.
Основные понятия	Возведение обеих частей уравнения в нечётную степень, иррациональное уравнение, возведение обеих частей уравнения в чётную степень.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	11.1, 11.2, 11.4		11.23		11.3, 11.5

Окончание

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
2	11.6, 11.8, 11.10, 11.12				11.7, 11.9, 11.11
3	11.13, 11.15, 11.17, 11.19, 11.21		11.24	№ 123 (2, 4), 124 (2), 126 (2), 127 (2)	11.14, 11.16, 11.18, 11.20, 11.22

Методические комментарии

Чаще всего иррациональные уравнения решаются возведением обеих частей в одну и ту же степень. Если эта степень нечётная, то при таком преобразовании проблем не возникает, поскольку полученное уравнение равносильно исходному. Учащиеся должны усвоить, что возведение обеих частей уравнения в чётную степень может привести к появлению посторонних корней. В этом случае иррациональные уравнения решаются методом следствий: переходят от данного уравнения к его следствию, а затем посторонние корни выявляют в результате проверки.

В примере 6 параграфа рассмотрено применение метода замены переменных при решении иррациональных уравнений.

Комментарии к упражнениям

№ 11.8 (3). Имеем: $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}-6(x+2)=0;$

$(x+2)(\sqrt{x^2-x-20}-6)=0$. В этом месте учащиеся допускают распространённую ошибку: считают, что совокупность $\left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ \sqrt{x^2-x-20}=6 \end{array}\right.$ равносильна данному уравнению. Эта ошибка приводит к появлению постороннего корня $x=-2$. На самом деле исходное уравнение равносильно системе $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ \sqrt{x^2-x-20}=6, \end{array}\right. \\ x^2-x-20\geqslant 0. \end{array}\right.$

№ 11.21 (1). Имеем: $\sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}+1}+\sqrt{x-2-6\sqrt{x-2}+9}=6;$

$\sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2}-3)^2}=6;$ $\left|\sqrt{x-2}-1\right|+\left|\sqrt{x-2}-3\right|=6.$ Пусть $\sqrt{x-2}=t.$ Тогда остаётся решить уравнение $|t-1|+|t-3|=6,$ где $t\geqslant 0.$

§ 12. Метод равносильных преобразований для решения иррациональных уравнений

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение решать иррациональные уравнения методом равносильных преобразований.

Личностные: формировать ответственное и творческое отношение к разным видам учебной деятельности.

Метапредметные: формировать умение приводить критические аргументы как в отношении собственного суждения, так и в отношении действий и суждений другого человека.

Планируемые результаты

Учащийся научится решать иррациональные уравнения методом равносильных преобразований.

Основные понятия

Теоремы о равносильных преобразованиях уравнений.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	12.1, 12.3		12.9		12.2, 12.4
2	12.5, 12.7		12.10	№ 130 (4), 131 (3), 132 (2)	12.6, 12.8

Методические комментарии

Теоремы 12.1 и 12.2 формируют метод равносильных преобразований при решении основных типов иррациональных уравнений.

Доказательство теоремы 12.1 является стандартным для такого типа теорем. Оно основано на таком свойстве множеств: если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$. Поэтому целесообразно перед изучением этой темы повторить основные свойства множеств.

Теорема 12.3 обобщает теоремы 12.1 и 12.2 и даёт возможность существенно расширить класс иррациональных уравнений, решаемых методом равносильных переходов.

Теорему 12.3 также удобно представить в такой форме: уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, для любого $x \in M$ равносильно системе $\begin{cases}(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k},\\ x \in M.\end{cases}$

Учащиеся нередко задают вопрос о том, каким методом лучше решать иррациональные уравнения: методом следствий или методом равносильных переходов. Однозначного ответа на этот вопрос нет. Например, если корни уравнения-следствия «удобные» для проверки, то метод следствий вполне приемлем. Каждый из указанных методов имеет недостатки. Так, если поиск множества M, на котором осуществляется равносильный переход, затруднён, то метод равносильных переходов может оказаться неприемлемым.

Комментарии к упражнениям

№ 12.1, 12.2. Важно обратить внимание учащихся на то, что при решении уравнение вида $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = h(x)$ не следует пользоваться теоремой 15.2. На самом деле такое уравнение равносильно системе $\begin{cases}f(x) \cdot g(x) = (h(x))^2;\\ h(x) \geqslant 0,\\ f(x) \geqslant 0,\\ g(x) \geqslant 0.\end{cases}$ К такому выводу можно прийти, записав область определения уравнения и используя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 12.2.

У учащихся может возникнуть вопрос, почему в этой и подобных системах требование «подкоренное выражение неотрицательно» выдвигается для каждого из подкоренных выражений. Ведь может показаться, что нет необходимости решать оба неравенства $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, поскольку из уравнения $f(x) \cdot g(x) = (h(x))^2$ следует, что если правая часть положительна и один из множителей левой части положительный, то положительным является и второй множитель.

Следует разъяснить учащимся, что такие рассуждения были бы верными для положительных чисел (т. е. для строгих неравенств). Если же рассматриваются нестрогие неравенства, то любая из рассматриваемых функций может принимать значение 0. В случае равенства нулю значения одной из функций $f(x)$ или $g(x)$ их произведение и соответственно значение функции $h(x)$ будут равными нулю независимо от значения другой функции $g(x)$ или $f(x)$. В качестве примера можно привести уравнение $\sqrt{x-3}\sqrt{x+5}=(x+5)^2$. Здесь переход к системе $\begin{cases}(x-3)(x+5)=(x+5)^4,\\ x+5\geqslant 0,\\ (x+5)^2\geqslant 0\end{cases}$ приводит к появлению постороннего корня, равного –5. Следует подробно разобрать с учащимися, почему этот корень не входит в область определения уравнения.

№ 12.5 (4). В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно предложить другое решение этого уравнения. Данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}-8=0$. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}-8$. Эта функция является возрастающей. Следовательно, каждое своё значение она принимает только в одной точке. Заметим, что $f(10)=0$. Значит, $x=10$ — единственный корень данного уравнения.

Рассказывая об этом методе решения, следует обратить внимание на то, что он применим в тех случаях, когда «заметить» единственный корень уравнения действительно легко. Данное уравнение не очень подходит для демонстрации преимуществ этого метода, ведь «заметить» корень, равный 10, не так и легко. Можно предложить учащимся самостоятельно придумать уравнения, которые действительно легко решаются с применением этого метода (например, когда корень уравнения равен 1).

§ 13. Иррациональные неравенства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение решать иррациональные неравенства. ***Личностные:*** формировать умение представлять результат своей деятельности. ***Метапредметные:*** формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится решать иррациональные неравенства.

2184020o1.indd 32 18.08.2017 11:49:34

Основные понятия Теоремы о равносильных преобразованиях неравенств.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	13.1, 13.2				13.3, 13.8
2	13.4, 13.6		13.9	№ 134 (3), 135 (3), 137 (4)	13.5, 13.7

Методические комментарии

Учащимся надо разъяснить, почему неравенства следует решать методом равносильных переходов. Целесообразно подчеркнуть, что для уравнений, имеющих конечное число решений, применимы два метода: метод равносильных переходов и метод следствий. В отличие от этого, решением неравенства, как правило, является бесконечное множество чисел, которые, естественно, подвергнуть проверке невозможно.

В параграфе предложено доказать теоремы 13.1—13.3 самостоятельно. Но несмотря на то что доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы 11.1, этот процесс обязательно следует проконтролировать.

Теорема 13.1 воспринимается учащимися легко. Однако учащимся трудно воспринять, что, изменив знак неравенства в теореме 13.2, мы получаем принципиально иную формулировку теоремы 13.3. Помочь пониманию могут такие наводящие вопросы.

«На основании такого неравенства что мы можем сказать о знаке значений функции $g(x)$?» (При изучении теоремы 13.2.)

«Какие числа всегда меньше, чем значение любого квадратного корня?» (При изучении теоремы 13.3.)

В теореме 13.3 следует уделить особое внимание формированию первой системы совокупности. Здесь может помочь устное решение уравнений типа $-\sqrt{x} > -1$, $\sqrt{x} \geqslant -3$, $\sqrt{x} \geqslant 0$.

Комментарии к упражнениям

№ 13.6 (1). В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно предложить им следующее решение этого неравенства.

Данное неравенство равносильно такому: $\sqrt{2-x}-x>0$. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{2-x}-x$. Она является убывающей. Заметим, что $f(1)=0$. Поэтому данное неравенство можно записать в виде: $f(x)>f(1)$. Отсюда на основании того, что функция является убывающей, можно сделать вывод, что $x<1$.

Контрольная работа № 3

Глава 3. Тригонометрические функции

§ 14. Радианная мера угла

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения выражать радианную меру угла в градусной мере и наоборот, устанавливать соответствие между точками единичной окружности и углами поворота. ***Личностные:*** формировать умение объективно оценивать труд одноклассников. ***Метапредметные:*** формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.
Планируемые результаты	Учащийся научится выражать радианную меру угла в градусной мере и наоборот, устанавливать соответствие между точками единичной окружности и углами поворота.
Основные понятия	Радиан, радианная мера угла, длина дуги окружности, радиуса R, содержащей α радиан.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	14.1, 14.2, 14.4, 14.6, 14.8, 14.10		14.22		14.3, 14.5, 14.7, 14.9, 14.11
2	14.12, 14.14, 14.15, 14.17, 14.19, 14.21		14.23	№ 143 (2, 4, 6, 8, 10), 145, 146	14.13, 14.16, 14.18, 14.20

Методические комментарии

Учащиеся нелегко воспринимают введение новой единицы измерения угла — радиан. Это, скорее всего, связано с тем, что сложно мотивировать причины перехода к новой мере угла. Сначала формируется лишь формальное знание.

Желательно, чтобы учащиеся запомнили данные таблицы, приведённой на с. 111 учебника.

В этом параграфе описательно вводится понятие угла поворота. Учащиеся с затруднениями воспринимают то, что с углом связаны величины, большие 360°, и даже отрицательные величины. Поэтому в первую очередь следует разъяснить им, что угол поворота — это не геометрическая фигура.

Учащиеся также должны понимать, что соответствие между точками единичной окружности и углами поворотов не является взаимно однозначным. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно при обсуждении этого вопроса подвести учащихся к выводу, что зависимость точки единичной окружности (а следовательно, и её координат) от угла поворота является функциональной, а зависимость угла поворота от точки единичной окружности — нет. Такой вывод будет пропедевтическим подходом к введению понятия тригонометрических функций.

Запись множества углов поворота, соответствующих данной точке единичной окружности, носит важный пропедевтический характер, поскольку является базой для решения тригонометрических уравнений. Поэтому следует уделить особое внимание тому, чтобы учащиеся хорошо освоили этот вид деятельности.

Комментарии к упражнениям

№ 14.17, 14.18. Желательно, чтобы учащиеся записывали формулу, задающую множество углов поворота. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно показать, что разные формулы могут задавать одно и то же множество углов поворота.

§ 15. Тригонометрические функции числового аргумента

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятиями тригонометрических функций числового аргумента, находить область определения и область значений тригонометрических функций. ***Личностные:*** формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные:*** формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями тригонометрических функций числового аргумента, находить область определения и область значений тригонометрических функций.

Основные понятия	Косинус угла поворота, синус угла поворота, тангенс угла поворота, котангенс угла поворота, тригонометрические функции, ось тангенсов, ось котангенсов.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	15.1, 15.3, 15.5, 15.7, 15.9		15.22		15.2, 15.4, 15.6, 15.8, 15.10
2	15.11, 15.13, 15.14, 15.16, 15.18, 15.20		15.23	№ 149 (2, 4), 151 (2, 4), 152 (2)	15.12, 15.15, 15.17, 15.19, 15.21

Методические комментарии

Перед изучением материала этого параграфа следует повторить соответствующий материал о тригонометрических функциях, изученный в курсах геометрии 8 и 9 классов.

После введения определения синуса и косинуса углов поворота следует разъяснить учащимся, что новое определение не противоречит ранее введённым определениям, а лишь их обобщает.

В зависимости от уровня математической подготовки класса можно разъяснить учащимся, что в предыдущем материале курса геометрии аргументами тригонометрических функций были величины углов, выраженные в градусах. В данный момент тригонометрические функции рассматриваются как числовые функции, причём их аргумент выражен в радианах. Поэтому, начиная с этого момента, в задачах как курса алгебры, так и курса геометрии допускается использование как радианной, так и градусной меры углов, однако следует обращать особое внимание на то, какая именно мера используется, и в случае необходимости выполнять перевод одной меры в другую. Это разъяснение особенно важно при применении калькуляторов различных моделей с различными функциональными возможностями. Показательным в этом отношении является стандартный калькулятор Windows: в режиме «Обычный» кнопки для вычисления значений тригонометрических функций отсутствуют (следовательно, отсутствует возможность применения тригонометрических функций без явного указания единицы измерения аргумента), а в режиме «Инженерный» на панели калькулятора присутствует указание на используемую единицу измерения аргумента.

В параграфе рассматриваются первоначальные свойства тригонометрических функций — область определения и область значений. При этом области значений тригонометрических функций находятся исходя из геометрических интерпретаций. В частности, для тангенса и котангенса вводятся понятия «ось тангенсов» и «ось котангенсов». В дальнейшем учащиеся ещё не один раз будут обращаться к единичной окружности и осям тангенсов и котангенсов для выявления и других свойств тригонометрических функций.

Комментарии к упражнениям

№ 15.11, 15.12, 15.20, 15.21. Результаты, полученные в этих задачах, будут применяться в дальнейшем. Кроме того, эти задачи имеют важное пропедевтическое значение.

№ 15.16, 15.17. Рассмотрите разность сравниваемых выражений.

§ 16. Знаки значений тригонометрических функций. Чётность и нечётность тригонометрических функций

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения находить знаки значений тригонометрических функций, исследовать тригонометрические функции на чётность и нечётность. ***Личностные:*** формировать независимость суждений. ***Метапредметные:*** формировать умения самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе и познавательной деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится находить знаки значений тригонометрических функций, исследовать тригонометрические функции на чётность и нечётность.
Основные понятия	Угол I (II, III, IV) четверти, знаки синуса в каждой из четвертей, знаки косинуса в каждой из четвертей, знаки тангенса в каждой из четвертей, знаки котангенса в каждой из четвертей, чётность и нечётность тригонометрических функций.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	16.1, 16.2, 16.4, 16.6		16.18		16.3, 16.5, 16.7

2184020o1.indd 38 18.08.2017 11:49:34

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
2	16.8, 16.10, 16.12, 16.14, 16.16		16.19	№ 156 (3), 158 (2, 4), 160 (2, 4, 6)	16.9, 16.11, 16.13, 16.15, 16.17

Методические комментарии

Схемы, изображённые на рисунках 16.1 и 16.2 учебника, легко воспринимаются, дают наглядное обоснование для определения знака тригонометрических функций и легко запоминаются.

Исследованию тригонометрических функций на чётность помогает рисунок 16.3 учебника.

При исследовании на чётность функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ учащиеся должны понимать, почему их область определения симметрична относительно начала координат.

Комментарии к упражнениям

№ 16.16 (5), 16.17 (4). Область определения этих функций не является симметричной относительно начала координат, поэтому эти функции не являются ни чётными, ни нечётными.

§ 17. Периодические функции

Технологическая карта урока

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятием периодической функции, находить период тригонометрической функции. ***Личностные:*** формировать умение объективно оценивать свой труд. ***Метапредметные:*** развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием периодической функции, находить период тригонометрической функции.

Основные понятия Периодическая функция, период функции, главный период функции, период функции $y = \sin x$, период функции $y = \cos x$, период функции $y = \operatorname{tg} x$, период функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	17.1, 17.3, 17.5, 17.7		17.9, 17.10	№ 162, 163 (2), 164 (2, 4)	17.2, 17.4, 17.6, 17.8

Методические комментарии

Понятие периодичности как свойство функции учащимся интуитивно понятно. Однако следует уделить достаточно внимания работе над определением периодической функции. В частности, учащимся следует разъяснить, почему в определении недостаточно ограничиться равенством $f(x) = f(x + T)$.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса после определения периодической функции можно привести примеры периодических функций, не являющихся тригонометрическими. Здесь могут оказать помощь графический и описательный способы задания функции. Хорошим примером является функция $y = \{x\}$ (дробная часть числа x).

Следует мотивировать учащимся целесообразность введения понятия главного периода функции.

В доказательстве теоремы 17.1 надо подробно разъяснить учащимся, почему в равенстве $\sin(x + T) = \sin x$ можно вместо x подставить значение $x = -\frac{T}{2}$.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить им, что число 5π, будучи периодом функции $y = \operatorname{tg} x$, не является её главным периодом.

Комментарии к упражнениям

№ 17.7. Предположим, что число π является периодом функции $f(x) = \sin x$. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{R}$ должно выполняться равенство $\sin(x + \pi) = \sin x$. Однако это равенство не выполняется, например, для $x = \frac{\pi}{2}$.

§ 18. Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение применять свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Личностные: формировать независимость суждений.

Метапредметные: формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами.

Планируемые результаты

Учащийся научится применять свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Основные понятия

Синусоида, свойства функции $y = \sin x$, косинусоида, свойства функции $y = \cos x$.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	18.1, 18.3, 18.5, 18.7		18.21		18.2, 18.4, 18.6, 18.8
2	18.9, 18.11, 18.12, 18.13, 18.15, 18.17	18.19	18.22	№ 167, 168 (2, 4, 6), 171 (2)	18.10, 18.14, 18.16, 18.18,

Методические комментарии

В начале параграфа описывается общая схема исследования тригонометрической функции.

Исследование свойств функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ строится на наглядных соображениях с использованием единичной окружности. Такой подход вполне оправдан тем, что он доступен большинству учащихся, и материал легко ими усваивается.

В зависимости от оснащённости математического кабинета следует иллюстрировать графики тригонометрических функций с помощью таблиц или компьютерной техники. Следует развивать подход, принятый для построения межпредметных связей: рекомендовать учащимся строить графики тригонометрических функций с помощью табличного редактора, специальных математических пакетов, а учащимся, склонным к изучению

2184020o1.indd 41 18.08.2017 11:49:35

программирования, — создавать собственные программы построения графиков.

В таблицах на с. 136 и 138 учебника приведены свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ с учётом их периодичности.

Перед рассмотрением примеров 4 и 5 следует повторить правила построения графиков функций $y = f(kx)$, $y = kf(x)$, $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$ с помощью графика функции $y = f(x)$.

Комментарии к упражнениям

№ 18.15 (1). При построении графика функции следует учесть, что область определения данной функции накладывает ограничение $\sin x \geqslant 0$.

№ 18.15 (4). Областью определения данной функции является множество $\{\pi n, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

№ 18.15 (5). Областью определения данной функции является множество $\{2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

§ 19. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение применять свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Личностные: развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы.

Метапредметные: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится применять свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Основные понятия

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$, свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	19.1, 19.3, 19.5, 19.7		19.15		19.2, 19.4, 19.6, 19.8

2184020o1.indd 42 18.08.2017 11:49:35

Окончание

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
2	19.9, 19.11, 19.13		19.16	№ 174, 175 (2, 4, 6), 178 (2)	19.10, 19.12, 19.14

Методические комментарии

Следует разъяснить учащимся, почему промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ является наиболее удобным для исследования свойств функции $y = \operatorname{tg} x$, а промежуток $(0; \pi)$ — для исследования свойств функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Использование осей тангенса и котангенса позволяет сделать исследование свойств функций наглядным и доступным.

В таблицах на с. 144—146 учебника приведены свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ с учётом их периодичности.

При построении графиков функций следует обратить внимание на их асимптотическое поведение. В частности, при переходе от построения графиков вручную к построению графиков с помощью компьютерных программ следует обратить особое внимание учащихся на такие аспекты: 1) для корректной работы программ не следует использовать в качестве значений аргумента те значения, при которых функции не определены; 2) следует обратить внимание на адекватное отображение поведения функций при приближении к асимптоте. Именно данные функции позволяют продемонстрировать учащимся, что реализация работы с рядом математических объектов с помощью компьютерных средств требует учёта некоторых их особенностей. Желательно, чтобы обсуждение этой тематики вызвало и обратную связь: послужило формированию у учащихся потребности при решении математических задач уделять особое внимание «существованию» объектов, о которых идёт речь в задаче: области определения уравнений и функций, применимости методов и т. п.

Комментарии к упражнениям

№ 19.13 (3). Областью определения данной функции является множество $\{\pi n, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

№ 19.14 (3). Областью определения данной функции является множество $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Контрольная работа № 4

§ 20. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения выводить и применять соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Личностные: развивать готовность к самообразованию и решению творческих задач.

Метапредметные: формировать умения устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.

Планируемые результаты

Учащийся научится выводить и применять соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Основные понятия

Основное тригонометрическое тождество, соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	20.1, 20.3, 20.5, 20.6, 20.7				20.2, 20.4, 20.8
2	20.9, 20.11, 20.13, 20.15		20.23		20.10, 20.12, 20.14, 20.16
3	20.17, 20.19, 20.21		20.24	№ 180 (2, 4, 6), 182 (1), 183 (2, 6)	20.18, 20.20, 20.22

Методические комментарии

Формулы, изучаемые в этом параграфе, знакомы учащимся из курса геометрии 9 класса. Отличие заключается лишь в том, что эти формулы обобщаются для произвольных допустимых значений аргумента.

Учащиеся должны понимать, что первые три тождества связывают квадраты значений тригонометрических функций. Поэтому знание значения одной из функций позволяет найти лишь модуль значения другой функции. Ответ в таких задачах можно найти однозначно только при наличии дополнительных условий, например, знания того, в какой координатной четверти находится аргумент функции.

Комментарии к упражнениям

№ 20.15 (1). Можно предложить два способа решения этой задачи. Первый способ. Из условия следует, что $\cos\alpha = 3\sin\alpha$. Тогда данную дробь можно представить в виде: $\frac{\sin\alpha - 3\sin\alpha}{\sin\alpha + 3\sin\alpha}$. Второй способ. Разделим числитель и знаменатель данной дроби на $\cos\alpha$. Получим: $\frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1}$.

§ 21. Формулы сложения

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения выводить и применять формулы сложения. ***Личностные:*** развивать готовность к самообразованию и решению творческих задач. ***Метапредметные:*** формировать умения устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится выводить и применять формулы сложения.
Основные понятия	Косинус разности, косинус суммы, синус разности, синус суммы, тангенс разности, тангенс суммы.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	21.1, 21.3, 21.5				21.2, 21.4, 21.6
2	21.7, 21.9, 21.11, 21.13, 21.15		21.29		21.8, 21.10, 21.12, 21.14, 21.16
3	21.17, 21.19, 21.21, 21.23, 21.25	21.27	21.30	№ 190 (2, 4), 192 (1, 3), 194	21.18, 21.20, 21.22, 21.24, 21.26

Методические комментарии

Доказательство формулы косинуса разности основано на неожиданной для учащихся идее — применении скалярного произведения векторов. Поэтому перед изучением этой темы целесообразно повторить соответствующий теоретический материал из курса геометрии 9 класса.

Заметим, что доказательство формулы косинуса разности проведено лишь для случая, когда $0 < \alpha - \beta \leqslant \pi$. Рассмотрение других случаев требует значительных затрат учебного времени. Поэтому приводить полное доказательство этой формулы нецелесообразно. Однако с целью формирования математической культуры учащихся следует обратить внимание на то, что данное доказательство рассматривает лишь часть возможных ситуаций, следовательно, само по себе является неполным.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса следует обратить их внимание на то, что левые и правые части формул тангенса суммы и тангенса разности имеют разные области определения. В правой части равенства появляется ограничение $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, которого нет в левой части равенства.

Комментарии к упражнениям

№ 21.25, 21.26. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса эти примеры можно обобщить, рассмотрев выражение вида $a\sin\alpha + b\cos\alpha$, и показать, как это выражение преобразовать в произведение.

№ 21.27 (2). Имеем: $y = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$. Из графика функции $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$ следует исключить точки, абсциссы которых равны $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

§ 22. Формулы приведения

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения выводить и применять формулы приведения. ***Личностные:*** развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы. ***Метапредметные:*** формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится выводить и применять формулы приведения.
Основные понятия	Формулы приведения для синуса, формулы приведения для косинуса, формулы приведения для тангенса, формулы приведения для котангенса, правила применения формул приведения.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	22.1, 22.3, 22.5, 22.7		22.16		22.2, 22.4, 22.6, 22.8
2	22.9, 22.11, 22.13, 22.14		22.17	№ 200 (2, 4), 201	22.10, 22.12, 22.15

Методические комментарии

В первую очередь учащиеся должны понять, для каких целей применяют формулы приведения. Важно, чтобы они усвоили, что вычисление значения тригонометрической функции любого аргумента можно свести к вычислению значения тригонометрической функции острого угла.

Тут следует заметить, что ещё несколько десятилетий назад необходимость такого подхода можно было мотивировать тем, что достаточно составить таблицы значений тригонометрических функций только для диапазона от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Сейчас, при широкой доступности вычислительной техники, необходимость в использовании таблиц отпала, и этот аргумент более не является для учащихся весомым. Для мотивации введения данных формул следует обратиться к историческому аспекту.

Все формулы приведения доказываются по аналогии — с использованием формул сложения, поэтому доказывать их нецелесообразно.

В сильном классе можно также рассмотреть в качестве отдельной задачи наглядное доказательство некоторых из формул для синуса и косинуса с помощью единичной окружности и определений этих функций.

Следует выделить достаточно учебного времени для отработки применения правил, приведённых в параграфе.

Комментарии к упражнениям

№ 22.11 (1). Воспользовавшись формулой $\operatorname{ctg}(90^0 - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, получаем, что $\operatorname{ctg}5° = \operatorname{tg}85°$, $\operatorname{ctg}15° = \operatorname{tg}75°$, $\operatorname{ctg}25° = \operatorname{tg}65°$, $\operatorname{ctg}35° = \operatorname{tg}55°$. Отдельно следует заметить, что $\operatorname{ctg}45° = 1$. Поэтому искомое значение выражения равно 1.

№ 22.14. Поскольку $\cos^2\frac{\pi}{8} = \sin^2\frac{3\pi}{8}$ и $\cos^2\frac{3\pi}{11} = \cos^2\frac{6\pi}{22} = \sin^2\frac{5\pi}{22}$, то искомое значение выражения равно 2.

§ 23. Формулы двойного и половинного углов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения выводить и применять формулы двойного угла и половинного угла. ***Личностные:*** формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием. ***Метапредметные:*** формировать умения устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится выводить и применять формулы двойного угла и половинного угла.

Основные понятия Формулы двойного угла, формула косинуса двойного угла, формула синуса двойного угла, формула тангенса двойного угла, формулы понижения степени, формулы половинного аргумента, формула косинуса половинного угла, формула синуса половинного угла, формула тангенса половинного угла

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	23.1, 23.3, 23.5				23.2, 23.4, 23.6
2	23.7, 23.9, 23.11, 23.13, 23.15, 23.17, 23.19				23.8, 23.10, 23.12, 23.14, 23.16, 23.18, 23.20
3	23.21, 23.22, 23.24, 23.28, 23.29	23.26	23.39		23.23, 23.25, 23.30
4	23.31, 23.33, 23.35, 23.37			№ 203 (2, 4, 6), 205 (2, 4, 6), 210	23.32, 23.34, 23.36, 23.38

Методические комментарии

Учащиеся должны усвоить, что формулы двойного и половинного углов можно применять не только для углов вида 2α и $\frac{\alpha}{2}$ соответственно. Следует объяснить, что эти формулы применимы к любым углам вида $k\alpha$, где $\alpha \neq 0$, поскольку любой из таких углов можно представить в виде $2 \cdot \frac{k}{2}\alpha$ и $\frac{2k\alpha}{2}$ соответственно. Например, $\sin k\alpha = 2\sin\frac{k}{2}\alpha\cos\frac{k}{2}\alpha$, $\cos k\alpha = \cos^2\frac{k}{2}\alpha - \sin^2\frac{k}{2}\alpha$.

В слабом классе для лучшего понимания этого утверждения можно устно решить несколько примеров на представление в нужном виде углов, например, 3α, $\frac{\alpha}{3}$ и т. п.

2184020o1.indd 49 18.08.2017 11:49:35

В сильном классе можно в качестве отдельного упражнения проверить, какие из этих формул применимы для случая $\alpha = 0$, и сделать вывод о том, какие из этих формул можно формально применять без учёта ограничений на величины углов, а для каких следует отдельно рассматривать эти ограничения.

Из формулы косинуса двойного угла получен ряд важных следствий, которые в дальнейшем будут иметь самостоятельное значение для решения тригонометрических уравнений.

Следует обратить внимание учащихся на то, что формулы половинного аргумента, приведённые на с. 171 учебника, не позволяют однозначно выразить тригонометрическую функцию.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса следует обратить их внимание на то, что в формулах, выражающих $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, левые и правые части имеют разные области определения.

Комментарии к упражнениям

№ 23.35 (1). Имеем: $\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{4\cos 18^\circ \sin 18^\circ \sin 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}$.

№ 23.37. Имеем: $\frac{3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha + 4\cos\alpha + 2}{1 + \cos 2\alpha - 4\cos\alpha + 2} = \frac{2\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 2}{2\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 2} = \frac{(\cos\alpha + 1)^2}{(\cos\alpha - 1)^2} = \operatorname{ctg}^4\frac{\alpha}{2}$.

§ 24. Сумма и разность синусов (косинусов)

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения выводить и применять формулы суммы и разности синусов и суммы и разности косинусов. ***Личностные:*** формировать умение представлять результат своей деятельности. ***Метапредметные:*** формировать умение осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата.
Планируемые результаты	Учащийся научится выводить и применять формулы суммы и разности синусов и суммы и разности косинусов.
Основные понятия	Формула суммы синусов, формула разности синусов, формула суммы косинусов, формула разности косинусов.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	24.1, 24.3, 24.5		24.13		24.2, 24.4, 24.6
2	24.7, 24.9, 24.11		24.14	№ 216, 218 (2, 4), 219 (2)	24.8, 24.10, 24.12

Методические комментарии

Учащиеся должны понимать, что замена $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$ возможна потому, что для любых значений α и β всегда можно найти такие x и y, что система уравнений $\begin{cases} x + y = \alpha, \\ x - y = \beta \end{cases}$ имеет решение. Для доказательства этого факта можно предложить учащимся решить эту систему методом сложения.

Учащимся надо показать, что изученные формулы позволяют преобразовывать в произведение сумму и разность не только одноимённых тригонометрических функций (синусов либо косинусов), но также и разноимённых, т. е. выражения вида $\sin\alpha + \cos\beta$, $\sin\alpha - \cos\beta$ и т. п. Такие выражения с помощью формул приведения сводятся к сумме или разности одноимённых функций. Это продемонстрировано в примере 1 (3) параграфа.

В примере 1 (5) параграфа применяется очень важный приём: для использования формул преобразования тригонометрических функций имеющаяся в выражении константа $\sqrt{3}$ представлена в виде значения тригонометрической функции угла-константы: $\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3}$. В сильном классе обязательно следует обратить внимание учащихся на то, что этот приём широко используется при преобразовании тригонометрических выражений, причём функцию, которая подставляется вместо константы, надо выбрать исходя из того, какую формулу удобнее всего применить в данном случае. Можно предложить учащимся представить числовую константу $\sqrt{3}$ в виде значения всех четырёх тригонометрических функций и посмотреть, какой вид при этом приобретёт данный пример.

Комментарии к упражнениям

№ 24.7, 24.8. Условия этих задач требуют дополнительных комментариев учителя, разъясняющих, какой смысл для выражений такого типа имеет задача «преобразовать в произведение». Следует не ограничиваться чисто формальными действиями (например, вынесением за скобки множителя «2»), а подойти к задаче с точки зрения применения тригонометрических формул.

№ 24.11 (1). $1+\sin\alpha+\cos\alpha = 1+\cos\alpha+\sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

§ 25. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения выводить и применять формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. ***Личностные:*** формировать умение представлять результат своей деятельности. ***Метапредметные:*** формировать умение осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата.
Планируемые результаты	Учащийся научится выводить и применять формулы суммы и разности тригонометрических функций, формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.
Основные понятия	Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	25.1, 25.3, 25.5		25.13		25.2, 25.4, 25.6
2	25.7, 25.9, 25.11		25.14	№ 222	25.8, 25.10, 25.12

Методические комментарии

В зависимости от уровня математической подготовки класса после рассмотрения примера 2 можно показать, что имеют место аналогичные формулы для $\sin 3\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$, $\operatorname{ctg} 3\alpha$.

Комментарии к упражнениям

№ 25.9. Эту задачу можно решать так же, как пример 2 параграфа. Кроме того, в зависимости от возможностей класса можно предложить учащимся доказать следующее тождество: $4\sin\alpha\sin(60° - \alpha)\sin(60° + \alpha) = \sin 3\alpha$, которое обобщает данные примеры.

Контрольная работа № 5

Глава 4. Тригонометрические уравнения и неравенства

§ 26. Уравнение $\cos x = b$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятием арккосинуса, решать уравнения вида $\cos x = b$. ***Личностные:*** формировать умение контролировать процесс своей математической деятельности. ***Метапредметные:*** развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием арккосинуса, решать уравнения вида $\cos x = b$.
Основные понятия	Арккосинус, формула корней уравнения $\cos x = b$ при $\|b\| \leqslant 1$, формула корней уравнения $\cos x = 0$, формула корней уравнения $\cos x = 1$, формула корней уравнения $\cos x = -1$.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	26.1, 26.3, 26.5		26.13		26.2, 26.4, 26.6
2	26.7, 26.9, 26.11		26.14	№ 223 (2, 4, 6), 224 (2), 226	26.8, 26.10, 26.12

Методические комментарии

В первую очередь учащиеся должны понять, что уравнение вида $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$ имеет бесконечно много корней, а при $|b| > 1$ это уравнение корней не имеет.

При необходимости, кроме примера решения уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$, можно продемонстрировать решение других уравнений, например при

$b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а также при отрицательных значениях b. Если учащиеся поймут, как решается уравнение $\cos x = b$ для частных случаев, то переход к общему случаю, как правило, проблем не вызывает.

Наибольшие трудности в материале этого параграфа вызывает понимание определения арккосинуса. Отработке этого понятия следует уделить значительное время, рассмотреть достаточное количество примеров.

При решении уравнений вида $\cos x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$ не следует использовать формулу корней уравнения $\cos x = b$. Для того чтобы учащиеся самостоятельно пришли к этому выводу и осознанно запомнили решения этих уравнений, можно вернуться к рассмотрению единичной окружности.

Комментарии к упражнениям

№ 26.5 (2, 4), 26.6 (1). Можно дать учащимся такой совет: воспользовавшись чётностью функции $y = \cos x$, записать данные уравнения так, чтобы коэффициенты, стоящие при переменной x, были положительными.

§ 27. Уравнение $\sin x = b$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятием арксинуса, решать уравнения вида $\sin x = b$. ***Личностные:*** формировать умение контролировать процесс своей математической деятельности. ***Метапредметные:*** развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием арккосинуса, решать уравнения вида $\sin x = b$.
Основные понятия	Арксинус, формула корней уравнения $\sin x = b$ при $\|b\| \leqslant 1$, формула корней уравнения $\sin x = 0$, формула корней уравнения $\sin x = 1$, формула корней уравнения $\sin x = -1$.

2184020o1.indd 55 18.08.2017 11:49:35

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	27.1, 27.3, 27.5		27.15		27.2, 27.4, 27.6
2	27.7, 27.9, 27.11, 27.13		27.16	№ 231 (2, 4, 6), 233, 234 (2)	27.8, 27.10, 27.12, 27.14

Методические комментарии

В первую очередь учащиеся должны понять, что уравнение вида $\sin x = b$ при $|b| \leqslant 1$ имеет бесконечно много корней, а при $|b| > 1$ это уравнение корней не имеет.

При необходимости, кроме примера решения уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, можно продемонстрировать решение других уравнений, например при $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а также при отрицательных значениях b. Если учащиеся поймут, как решается уравнение $\sin x = b$ для частных случаев, то переход к общему случаю, как правило, проблем не вызывает.

После того как при изучении предыдущего параграфа учащиеся усвоили определение арккосинуса, понимание определения арксинуса должно вызвать гораздо меньше затруднений. Тем не менее отработке этого понятия следует уделить значительное время, рассмотреть достаточное количество примеров.

Следует обратить внимание учащихся, что определения арксинуса и арккосинуса схожи, однако принципиальное различие заключается в границах промежутка, которому принадлежит значение арксинуса (арккосинуса). В классе с высоким уровнем математической подготовки можно, пользуясь графиками соответствующих тригонометрических функций, обсудить, из каких соображений выбраны именно эти промежутки. Учащиеся должны обратить внимание на то, что в обоих промежутках присутствует значение 0; каждый промежуток представляет собой значения функции синус (косинус) для промежутка значений аргумента длиной в полпериода, на котором функция возрастает (убывает); выбранный промежуток «ближе всего» прилегает к нулю, а следовательно, полученные значения арксинуса (арккосинуса) наиболее удобны для вычислений.

2184020o1.indd 56 18.08.2017 11:49:35

При решении уравнений вида $\sin x = 0$, $\sin x = 1$, $\sin x = -1$ не следует использовать формулу корней уравнения $\sin x = b$. Для того чтобы учащиеся самостоятельно пришли к этому выводу и осознанно запомнили решения этих уравнений, можно вернуться к рассмотрению единичной окружности.

Формула корней уравнения $\sin x = b$ воспринимается учащимися более тяжело, чем формула корней уравнения $\cos x = b$, из-за записи $(-1)^k$. Хотя в дальнейшем учащиеся будут легко применять эту формулу, на данном этапе следует уделить особое внимание пониманию её сущности, особенно переходу от двух наглядно понятных формул $x = \alpha + 2\pi n$ и $x = \pi - \alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, к сокращённой форме записи $x = (-1)^k\alpha + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Комментарии к упражнениям

№ 27.5 (2, 4), 27.6 (1). Можно дать учащимся такой совет: воспользовавшись нечётностью функции $y = \sin x$, записать данные уравнения так, чтобы коэффициенты, стоящие при переменной x, были положительными. Этот же приём рекомендовалось использовать при решении задач 26.5 (2, 4), 26.6 (1) предыдущего параграфа, поэтому желательно, чтобы учащиеся сами пришли к выводу о возможности его использования и для данных задач.

§ 28. Уравнения $\operatorname{tg} x = b$ и $\operatorname{ctg} x = b$

Технологическая карта урока

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятиями арктангенса и арккотангенса, решать уравнения вида $\operatorname{tg} x = b$ и $\operatorname{ctg} x = b$. ***Личностные:*** формировать независимость суждений. ***Метапредметные:*** развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями арктангенса и арккотангенса, решать уравнения вида $\operatorname{tg} x = b$ и $\operatorname{ctg} x = b$.
Основные понятия	Арктангенс, формула корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$, арккотангенс, формула корней уравнения $\operatorname{ctg} x = b$.

2184020o1.indd 57 18.08.2017 11:49:35

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	28.1, 28.3, 28.5, 28.7	28.9	28.11, 28.12	№ 238 (2, 4, 6), 240	28.2, 28.4, 28.6, 28.8

Методические комментарии

Методика изложения материала данного параграфа такая же, как и для двух предыдущих параграфов. Поэтому желательно придерживаться ранее изложенных методических рекомендаций, в частности для того, чтобы учащиеся осознавали единый подход к введению понятий арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, и соответственно — к решению простейших тригонометрических уравнений (а в дальнейшем — функций, обратных тригонометрическим, и методов решения тригонометрических неравенств).

Однако следует заострить внимание учащихся на различиях в определениях. Особо следует обратить внимание на промежутки, которым принадлежат значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, и их запись с круглыми либо квадратными скобками. В сильном классе можно обсудить с учащимися, почему для арксинуса и арккосинуса промежутки включают в себя числа, их ограничивающие, а для арктангенса и арккотангенса — не включают.

Комментарии к упражнениям

28.3 (3, 6), 28.5 (2, 4), 28.6 (2). Можно дать учащимся совет: воспользовавшись нечётностью функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, записать данные уравнения так, чтобы коэффициенты, стоящие при переменной x, были положительными. Этот же приём рекомендовалось использовать при решении задач 26.5 (2, 4), 26.6 (1), 27.5 (2, 4), 27.6 (1), поэтому желательно, чтобы учащиеся сами пришли к выводу о возможности его использования.

§ 29. Функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения строить графики обратных тригонометрических функций, применять свойства обратных тригонометрических функций при решении задач.

Личностные: формировать умение объективно оценивать свой труд.

Метапредметные: развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.

Планируемые результаты Учащийся научится строить графики обратных тригонометрических функций, применять обратные тригонометрические функции при решении задач.

Основные понятия Функция $y = \arccos x$, функция $y = \arcsin x$, функция $y = \mathrm{arctg}\, x$, функция $y = \mathrm{arcctg}\, x$, свойства обратных тригонометрических функций.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	29.1, 29.3, 29.5		29.15		29.2, 29.4, 29.6
2	29.7, 29.9, 29.11, 29.13		29.16	№ 242, 244, 247	29.8, 29.10, 29.12, 29.14

Методические комментарии

Материал этого параграфа является традиционно сложным для учащихся. Во многом он основан на свойствах взаимно обратных функций. Поэтому перед изучением этого параграфа следует повторить соответствующий материал.

Целый ряд тождеств этого параграфа получен за счёт равенства $g(f(x)) = x$, где f и g — взаимно обратные функции. Это равенство выполняется для всех $x \in D(f)$. Учащиеся часто забывают учитывать последнее ограничение. Например, в тождестве $\cos(\arccos x) = x$ учащиеся не учитывают, что оно выполняется только для $x \in [-1; 1]$.

Графическая интерпретация равенства $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ позволяет учащимся лучше понять и запомнить это тождество. При необходимости можно аналогичным способом проиллюстрировать тождество $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x$.

Не следует требовать от учащихся, чтобы они заучивали содержание таблицы, приведённой на с. 212 и 213 учебника. Все эти свойства можно «извлечь» из эскиза графика соответствующей функции. В свою очередь, графики этих функций строятся на основании графиков тригонометрических функций. Поэтому может оказаться целесообразным повторить с учащимися графики и основные свойства тригонометрических функций и продемонстрировать, как с помощью цепочки «тригонометрическая функция и её свойства — обратная тригонометрическая функция — её свойства» вывести свойства, содержащиеся в таблице. Это будет способствовать более осознанному усвоению и систематизации материала этой главы.

Комментарии к упражнениям

№ 29.9, 29.10. Чтобы решение этих задач было полным, учащиеся должны указать значения аргументов, при которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

№ 29.11. Поскольку $\sqrt{x} \geqslant 0$ для любого $x \in [0; +\infty)$, то $0 \leqslant \arccos\sqrt{x} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Отсюда $2 \leqslant \arccos\sqrt{x} + 2 \leqslant \frac{\pi}{2} + 2$. Заметим, что $\arccos 0 + 2 = \frac{\pi}{2} + 2$ и $\arccos\sqrt{1} + 2 = 2$. Поэтому $\max\limits_{[0;1]}(\arccos\sqrt{x} + 2) = \frac{\pi}{2} + 2$ и $\min\limits_{[0;1]}(\arccos\sqrt{x} + 2) = 2$.

№ 29.13 (2). Пусть $\arcsin\frac{1}{4} = \alpha$. Поскольку $0 < \frac{1}{4} < 1$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Имеем: $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Запишем: $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Отсюда $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{1 - \sin^2\alpha} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} - 1 = \frac{1}{15}$. Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

§ 30. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения решать тригонометрические уравнения методом замены переменной, однородные тригонометрические уравнения. ***Личностные:*** развивать познавательный интерес к математике. ***Метапредметные:*** формировать умения осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований.

Планируемые результаты	Учащийся научится решать тригонометрические уравнения методом замены переменной, тригонометрические однородные уравнения.
Основные понятия	Простейшие тригонометрические уравнения, однородное тригонометрическое уравнение первой степени, однородное тригонометрическое уравнение второй степени.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	30.1, 30.3				30.2, 30.4
2	30.5, 30.7, 30.9	30.11	30.23		30.6, 30.8, 30.10
3	30.13, 30.15, 30.17, 30.21	30.19	30.24	№ 249 (2, 4), 251 (2, 4), 254	30.14, 30.16, 30.18, 30.22

Методические комментарии

Решение уравнений этого параграфа основано на методе замены переменной. Поэтому целесообразно перед изучением этой темы повторить метод замены переменной при решении алгебраических уравнений.

Большая часть параграфа посвящена однородным тригонометрическим уравнениям первой и второй степени.

При решении однородного тригонометрического уравнения приходится делить обе части уравнения на выражение, содержащее переменную. Следует разъяснить учащимся, что такое действие можно производить лишь тогда, когда корни делителя не являются корнями данного уравнения. Например, деление обеих частей уравнения $\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$ на $\cos^2 x$ приводит к потере решений вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$.

Комментарии к упражнениям

№ 30.21 (1). Данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\sin x = a, \\ \sin x = 2a - 3.\end{array}\right.$

Эта совокупность имеет решения, если имеет решения совокупность

$\left[\begin{array}{l}|a| \leqslant 1, \\ |2a-3| \leqslant 1.\end{array}\right.$ Решив эту совокупность, найдём искомые значения параметра a.

§ 31. Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение решать тригонометрические уравнения методом разложения на множители.

Личностные: формировать умение формулировать собственное мнение.

Метапредметные: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится решать тригонометрические уравнения методом разложения на множители.

Основные понятия

Метод разложения на множители.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	31.1, 31.3		31.9		31.2, 31.4
2	31.5, 31.7		31.10	№ 257 (2, 3), 259 (3), 262	31.6, 31.8

Методические комментарии

При решении тригонометрических уравнений часто приходится переходить к совокупности, состоящей из нескольких тригонометрических уравнений. Нередко учащиеся задают вопрос: «Надо ли при записи решений каждого уравнения совокупности использовать разные буквы для обозначения целочисленного параметра, или можно использовать одну и ту же букву?» Следует разъяснить учащимся, что, поскольку речь идёт о совокупности, то приемлемой является каждая из вышеуказанных форм записи ответа.

Нередко при решении тригонометрических уравнений ответом является объединение нескольких множеств, имеющих непустое пересечение. В этом случае не следует требовать от учащихся находить объединение множеств, в которых есть одинаковые элементы.

Комментарии к упражнениям

№ 31.7 (9). Имеем: $\cos 9x = -2\cos 3x$; $\cos 9x + \cos 3x + \cos 3x = 0$; $2\cos 6x \cos 3x + \cos 3x = 0$; $\cos 3x(2\cos 6x + 1) = 0$ и т. д.

§ 32. Решение простейших тригонометрических неравенств

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение решать простейшие тригонометрические неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами.

Планируемые результаты

Учащийся научится решать простейшие тригонометрические неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.

Основные понятия

Простейшие тригонометрические неравенства.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	32.1, 32.3		32.9		32.2, 32.4
2	32.5, 32.6, 32.7		32.10	№ 264 (3, 4), 265 (4)	32.8, 32.11

Методические комментарии

Существует два приёма обучения решению простейших тригонометрических неравенств: с помощью графиков тригонометрических функций и с помощью интерпретации решений на единичной окружности. В учебнике реализован первый из этих приёмов. Такой выбор основан на том, что изображение решений с помощью графиков тригонометрических функций более наглядно и вызывает меньше проблем у учащихся при записи ответа.

В сильном классе можно дополнительно продемонстрировать учащимся использование единичной окружности.

Учащиеся должны понимать, что для анализа и записи решений достаточно исследовать поведение функции на промежутке длиной в период. Однако запись решения зависит от того, какой именно из промежутков такой длины рассматривается в процессе решения. Иными словами, одно и то же множество решений может быть записано в разной форме.

Комментарии к упражнениям

№ 32.5 (3, 4, 6), 32.6 (3). При решении этих неравенств желательно, воспользовавшись чётностью (нечётностью) тригонометрических функций, записать неравенство так, чтобы коэффициент при переменной x стал положительным.

Контрольная работа № 6

Глава 5. **Производная и её применение**

§ 33. Представление о пределе функции в точке и о непрерывности функции в точке

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятиями предела функции в точке, непрерывности функции в точке. ***Личностные:*** развивать познавательный интерес к математике. ***Метапредметные:*** формировать представление об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями предела функции в точке, непрерывности функции в точке.
Основные понятия	Предел функции в точке; функция, непрерывная в точке; функция, непрерывная на множестве; непрерывная функция.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	33.1, 33.3				33.2, 33.4, 33.9
2	33.5, 33.6, 33.7		33.10	№ 267 (*б*, *г*), 268 (2, 3)	33.8, 33.11

Методические комментарии

В учебнике не даётся строгое определение предела функции в точке. Это понятие вводится с помощью наглядной иллюстрации (рисунки 33.1—33.3 учебника). Обратим внимание, что для первоначального ознакомления с понятием предела выбраны графики дифференцируемых функций, поэтому вопрос о существовании предела на данный момент у учащихся не возникает. Наглядное представление о пределе для таких функций формируется достаточно легко. При разъяснении этого понятия удобно пользоваться такими словосочетаниями: «стремится к», «становится всё меньше и меньше», «всё меньше и меньше отличается от», «как угодно близко подходит» и т. д.

2184020o1.indd 65 18.08.2017 11:49:35

Важно, чтобы учащиеся поняли, что речь идёт не просто о пределе некоторой функции, а о пределе данной функции в данной конкретной точке. Показательным является пример, изображённый на рисунке 33.2, на основании которого можно сделать выводы, что в различных точках функция имеет различные пределы и что пределы функции в различных точках могут быть равными.

Следует обратить внимание на то, что функция, имеющая предел в некоторой точке, может быть не определена в этой точке (рис. 33.4 учебника), иметь в этой точке значение функции, равное пределу функции в этой точке (рис. 33.1 и 33.8, функция f), и иметь в этой точке значение функции, отличающееся от предела функции в этой точке (рис. 33.8, функция g). Все эти три варианта удовлетворяют определению предела функции в точке.

Примеры, связанные с рисунком 33.3, показывают, что понятие предела функции в точке рассматривается не только для внутренних точек области определения. Но при этом можно подчеркнуть, что понятие предела функции в точке обязательно связано с некоторым промежутком из области определения функции, которому принадлежит рассматриваемая точка. Для изолированных точек понятие предела функции в точке не рассматривают.

Случаю, разобранному на рисунке 33.4 учебника, следует уделить особое внимание, потому что он является пропедевтическим подходом к рассмотрению функций, у которых предел в некоторой точке не совпадает со значением функции в этой точке, а далее на основании этого — к понятию непрерывной функции.

На рисунках 33.5—33.7 учебника приведены примеры функций, не имеющих предела в рассматриваемой точке. Причины, по которым эти функции не имеют предела, можно отнести к двум основным категориям:

• предел справа не равен пределу слева;

• значения функции в окрестностях рассматриваемой точки стремятся к бесконечности.

Эти ситуации легко описать с помощью указанных рисунков.

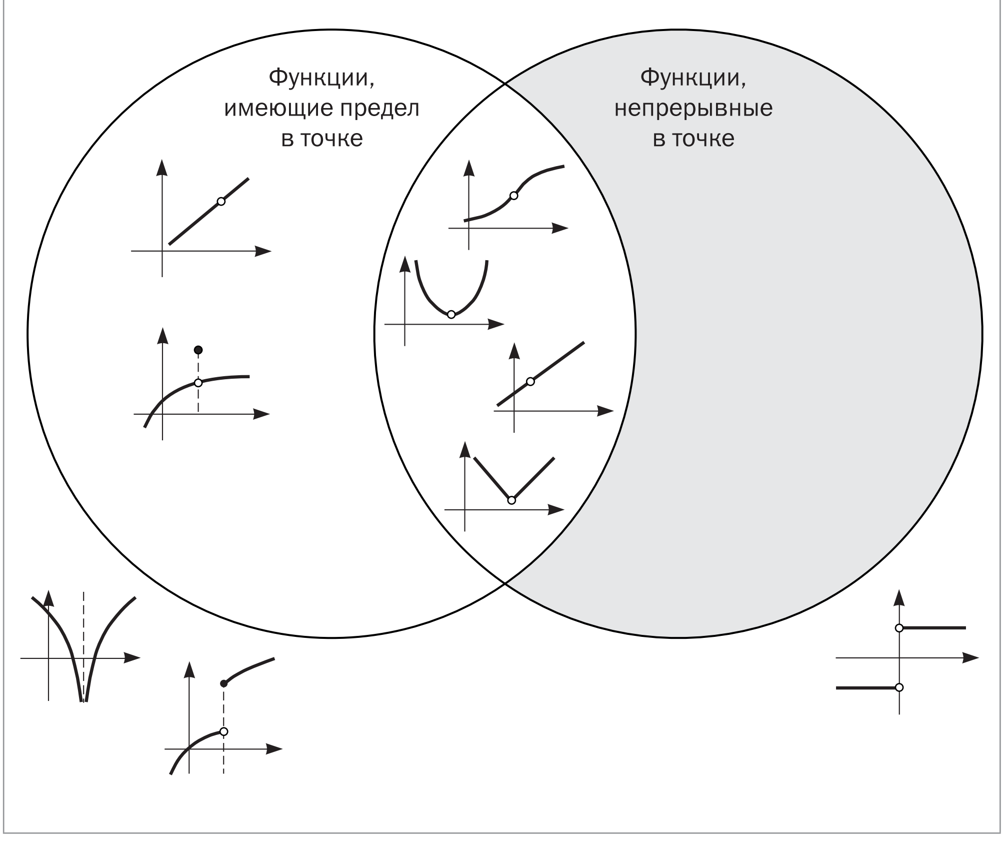
Обязательно следует рассмотреть различие между функциями, изображёнными на рисунках 33.7 и 33.8 учебника (функция g).

Представление понятия о непрерывной функции в точке x_0 с помощью свойства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ полностью соответствует наглядному представлению учащихся о непрерывной кривой как о линии, которую можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги.

После введения определения функции, непрерывной на множестве, следует вернуться к рисункам 33.5 и 33.7 учебника и предложить учащимся определить, на каких множествах эти функции являются непрерывными.

Полезно начать составлять с учащимися диаграмму Эйлера, которая описывает соотношение множеств функций, имеющих предел в точке; непрерывных в точке; не принадлежащих ни к одному из этих множеств. В круги диаграммы следует заносить схематические изображения функций. Это следует обсудить с учащимися и сразу отобразить это на диаграмме. В конце изучения параграфа диаграмма должна приобрести приблизительно такой вид, как показано на рисунке 1.

Рис. 1



Комментарии к упражнениям

№ 33.3. Важно, чтобы учащиеся понимали, что функции, графики которых изображены на рисунке 33.10 (*и*, *к*) учебника, имеют предел в рассматриваемой точке, но не являются непрерывными в ней.

№ 33.6, 33.8. Учащиеся должны с помощью графика выяснить, имеет ли функция предел в указанной точке, найти значение этого предела и найти значение функции в этой точке. Полученные значения сравнить, проверив выполнение равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

§ 34. Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции

Технологическая карта урока

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятием приращения функции в точке, касательной к графику функции.

Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики.

Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием приращения функции в точке, касательной к графику функции.

Основные понятия

Приращение аргумента функции в точке, приращение функции в точке, закон движения, мгновенная скорость, касательная к графику функции.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	34.1, 34.3, 34.5, 34.7	34.9	34.11, 34.12	№ 269 (3), 271	34.2, 34.4, 34.6, 34.8

Методические комментарии

В начале изучения параграфа целесообразно предложить учащимся привести несколько примеров, в которых для исследования ситуации следует найти разность значений функции в двух точках. Желательно обратить внимание на те примеры, в которых эти точки будут находиться достаточно близко друг к другу. После введения понятий приращения аргумента и приращения функции в точке следует разобрать, какое смысловое значение в рассматриваемых примерах имеют эти понятия.

В зависимости от уровня математической подготовки класса можно разъяснить учащимся, какое значение имеет содержание сноски 2 на с. 245 учебника. Благодаря этой сноске в дальнейшем понятие производной рассматривается в тех точках области определения функции, которые не являются изолированными.

Пример 1 данного параграфа учащиеся воспринимают как чисто теоретический, пока что они не видят его практического применения.

Рассмотрению задачи о мгновенной скорости поможет обращение к спидометру автомобиля, который показывает (с некоторой точностью, но этим можно пренебречь) именно мгновенную скорость автомобиля в данный момент.

При рассмотрении задачи о касательной к графику функции в первую очередь надо добиться от учащихся понимания того, чем определение касательной к графику функции отличается от определения касательной к окружности. Для примера можно взять функцию синус и рассмотреть касательные к синусоиде в различных её точках. Следует подчеркнуть, что нас интересует поведение касательной в окрестностях исследуемой точки и не интересует, пересекает ли эта прямая график этой же функции ещё в какой-то точке. Также можно продемонстрировать с помощью графика функции, что наличие одной общей точки у прямой и кривой не является ни необходимым, ни достаточным условием существования касательной к графику функции в данной точке.

В конце изучения параграфа следует сделать вывод о том, что, хотя задачи о мгновенной скорости и о касательной к графику функции описывают совершенно разные процессы, они имеют общую математическую модель. Следует подчеркнуть удобство этой модели для исследования процессов.

Комментарии к упражнениям

№ 34.7, 34.8. При решении этих задач следует воспользоваться схемой, которая описана в задаче о мгновенной скорости.

№ 34.9, 34.10. При решении этих задач следует воспользоваться схемой, которая описана в решении примера 2 параграфа.

§ 35. Понятие производной

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятием производной функции в точке, находить производную функции в точке, используя определение.

	Личностные: формировать ответственное отношение к обучению, готовность к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию.
	Метапредметные: формировать умения сравнивать, анализировать, обобщать по разным основаниям, моделировать выбор способов деятельности, группировать.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием производной функции в точке, находить производную функции в точке, используя определение.
Основные понятия	Производная функции в точке, геометрический смысл производной, механический смысл производной, дифференцируемая в точке функция, производная функции, дифференцируемая на множестве функция, дифференцируемая функция, дифференцирование.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	35.1, 35.2, 35.4, 35.6				35.3, 35.5, 35.7
2	35.8, 35.10, 35.12, 35.14, 35.16		35.26		35.9, 35.11, 35.13, 35.15
3	35.17, 35.19, 35.21, 35.22	35.24	35.27	№ 273 (2, 4, 6, 8), 275 (4), 278	35.18, 35.20, 35.23

Методические комментарии

Сопоставив определение производной и задачи о мгновенной скорости и о касательной к графику функции, рассмотренные в предыдущем параграфе, учащиеся должны осознать механический и геометрический смысл производной. Этому во многом будет способствовать пример 1, разобранный в параграфе.

Схема вычисления производной функции в точке, рассмотренная в этом параграфе, основана на определении производной. Она достаточно трудоёмка, однако учащиеся всё же должны её освоить и решить некоторое количество задач. В частности, полезным является вывод формул для вычисления производных линейной функции и функций $y = x^2$ и $y = x^3$ на основании определения, приведённый в примерах этого параграфа. При этом механический и геометрический смысл производной придаёт этим задачам менее формальный характер.

Очевидно, что понятия производной и предела функции в точке тесно связаны между собой. При этом каждая функция, имеющая производную в точке, имеет предел в этой точке; однако не каждая функция, имеющая предел в этой точке, является дифференцируемой в данной точке. Для того чтобы учащиеся лучше осознали это различие, целесообразно вернуться к рассмотрению рисунков 33.4—33.8 учебника.

Если при изучении § 33 учитель начал составлять с учащимися диаграмму Эйлера, которая описывает соотношение множества функций, имеющих предел в точке, и множества функций, непрерывных в точке, то при изучении данного параграфа следует дополнить диаграмму кругом «дифференцируемые в точке» и пересмотреть классификацию функций, уже нанесённых на диаграмму.

В данном параграфе приведены формулы для вычисления производных для большинства функций, которые были изучены ранее в школьном курсе алгебры. Для части из них приведён вывод формул на основании определения производной, остальные принимаются без доказательства. Учащиеся должны запомнить эти формулы и уметь их применять.

Для решения большинства задач данного параграфа, требующих вычисления значения производной, надо пользоваться именно этими формулами. Если в задаче предусмотрено нахождение производной с помощью определения, то в формулировке задачи это указано явно.

Комментарии к упражнениям

№ 35.6, 35.7. Вначале следует воспользоваться формулами нахождения производной, а затем найти значение функции (полученной производной) в заданной точке.

№ 35.14, 35.15. Эти задачи имеют особое значение для усвоения учащимися геометрического смысла производной.

№ 35.16. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся можно предложить им обобщить эту задачу, сделав вывод о связи характера монотонности функции со знаком её производной.

№ 35.21. Следует установить с помощью графика, какой угол, тупой или острый, образует касательная к графику, проведённая в указанной точке.

2184020o1.indd 71 18.08.2017 11:49:36

§ 36. Правила вычисления производных

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение применять формулы производной суммы, произведения, частного. ***Личностные:*** формировать представление о математической науке как сфере математической деятельности, о её значимости для развития цивилизации ***Метапредметные:*** формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах.
Планируемые результаты	Учащийся научится применять формулы производной суммы, произведения, частного, сложной функции.
Основные понятия	Производная суммы, производная произведения, производная частного, производная сложной функции.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	36.1, 36.3, 36.5		36.26		36.2, 36.4, 36.6, 36.27
2	36.7, 36.9, 36.11, 36.12		36.28		36.8, 36.10, 36.13, 36.29
3	36.14, 36.15, 36.17, 36.19, 36.21, 36.24	36.23	36.30	№ 282 (2, 5), 283 (2), 284 3, 6),	36.16, 36.18, 36.20, 36.22

Методические комментарии

Вывод формул (правил вычисления производных), изучаемых в этом параграфе, основывается на материале из курса математического анализа, который не изучается в школе. Поэтому в учебнике приводится лишь схематический ход доказательств. Однако и он может оказаться достаточно сложным для части учащихся. Поэтому не следует требовать от учащихся запоминания этой теоретической части. Достаточно того, чтобы учащиеся запомнили формулы и научились их применять.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить им, какое значение имеет содержание сноски на с. 262 учебника. Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0 и определены соответственно на промежутках $(-\infty; x_0]$ и $[x_0; \infty)$, то теоремы 36.1—36.4 выполняться не будут.

Если требуется найти значение производной функции в конкретной точке, то алгоритм действий должен быть таков: сначала с помощью изученных формул вычислить производную и максимально упростить формулу, лишь затем подставлять в неё значение аргумента. Учащиеся часто допускают ошибки, сразу же подставляя значение аргумента и вычисляя производную в некоторой точке, а затем подставляя полученное значение в качестве аргумента для следующих вычислений. Для профилактики ошибок следует также разобрать с учащимися задачу 36.14.

Применение формулы производной сложной функции требует умения учащихся «увидеть» структуру сложной функции и представить функцию в виде $f(g(h(\ldots(x)\ldots)$, где f, g, h, ... — известные учащимся функции, для которых они умеют находить производные.

Опыт показывает, что учащиеся чаще всего ошибаются при вычислении производной сложной функции. Для профилактики ошибок целесообразно подробно разобрать с учащимися решение всех задач из примера 2 параграфа.

Комментарии к упражнениям

№ 36.15, 36.16. Перед решением этих задач следует повторить с учащимися механический смысл производной.

№ 36.17, 36.18. Перед решением этих задач следует повторить с учащимися геометрический смысл производной.

№ 36.24. Следует обратить внимание учащихся на то, что данная сложная функция имеет структуру $y = f(g(h((x))$.

§ 37. Уравнение касательной

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение составлять уравнение касательной, проведённой к графику функции в точке с заданной абсциссой. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится составлять уравнение касательной, проведённой к графику функции в точке с заданной абсциссой.

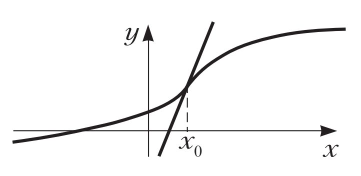
Основные понятия Уравнение касательной.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	37.1, 37.3				37.2, 37.4
2	37.5, 37.7, 37.9, 37.10, 37.12		37.23		37.6, 37.8, 37.11, 37.13
3	37.14, 37.16, 37.18, 37.21	37.19		№ 290, 293	37.15, 37.17, 37.22

Методические комментарии

Учащиеся должны усвоить, что об уравнении касательной к графику функции в некоторой точке может идти речь только тогда, когда функция является дифференцируемой в данной точке. Для обоснования этого можно вернуться к примерам функций, не дифференцируемых в точке, приведённым в § 35.

Рис. 2



Следует обратить внимание учащихся на трактовку понятия «касательная» как крайнего положения секущей. Следовательно, касательная не обязательно должна располагаться с одной стороны от графика функции, как это требуется для касательных к линиям в курсе геометрии. Желательно привести пример графика такой функции (рис. 2). Также можно найти уравнение касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке x_0 и затем сделать соответствующий рисунок.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить, какую невертикальную прямую называют касательной к графику функции: прямую с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$, называют касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

Изученный в параграфе теоретический материал позволяет записывать уравнение касательной к графику функции в точке с известной абсциссой. Поэтому в ряде задач к этому параграфу требуется сначала найти абсциссу некоторой точки и лишь затем искать производную в этой точке.

Комментарии к упражнениям

№ 37.16, 37.17. Условие задачи позволяет легко найти угловой коэффициент касательной.

№ 37.18. На графике данной функции найдите точку, касательная в которой имеет угловой коэффициент, равный 12.

№ 37.21. Найдите координаты точек, в которых указанная касательная пересекает координатные оси.

Контрольная работа № 7

§ 38. Признаки возрастания и убывания функции

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение находить промежутки возрастания и убывания функции, используя признаки возрастания и убывания функции.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы.

Планируемые результаты

Учащийся научится находить промежутки возрастания и убывания функции, используя признаки возрастания и убывания функции.

Основные понятия

Признак постоянства функции, признак возрастания функции, признак убывания функции.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	38.1, 38.3		38.16		38.2, 38.4
2	38.5, 38.6, 38.8, 38.10, 38.12	38.14	38.17	№ 297, 300	38.7, 38.9, 38.11, 38.13

Методические комментарии

В параграфе связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции разъясняется на интуитивно-наглядном уровне с использованием в первую очередь геометрической интерпретации. Теоремы данного параграфа (признаки постоянства, возрастания и убывания функции) приводятся без доказательств.

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции позволяет находить промежутки монотонности функции в зависимости от знака производной на этих промежутках. Все выводы теорем 38.1—38.3 также подкрепляются с помощью механического смысла производной.

Целесообразно перед изучением этой темы повторить метод интервалов для решения неравенств.

Важной частью решения задачи на поиск промежутков монотонности функции является правильная запись ответа. Из курса алгебры 9 класса учащиеся знают, что в ответ следует включать тот промежуток возрастания (убывания) функции, который не содержится в другом промежутке монотонности. Например, из курса математического анализа известно, что если функция возрастает (убывает) на промежутке $(-\infty; x_0)$ и непрерывна в точке x_0, то эта функция также возрастает (убывает) на промежутке $(-\infty; x_0]$. В примере 2 параграфа разъясняется, когда концы промежутков монотонности следует включать в ответ.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить учащимся, что теоремы, обратные признакам возрастания (убывания) функции, неверны. Например, функция $y = x^3$ является возрастающей, однако её производная принимает неотрицательные значения (а не «положительные»). Также функция может быть возрастающей (убывающей) на некотором промежутке I, но при этом не быть дифференцируемой во всех точках этого промежутка (см., например, рис. 39.10 учебника).

Комментарии к упражнениям

№ 38.6. На рисунке 38.10 учебника изображён график дифференцируемой функции, возрастающей на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывающей на промежутке $[0; \infty)$. Следовательно, на указанных промежутках производная принимает соответственно положительные и отрицательные значения, причём в точке $x = 0$ производная равна нулю. Значит, искомому ответу удовлетворяет рисунок 38.11, *б*.

№ 38.8. На первом графике видно, что на промежутке $(-1; 1)$ производная принимает отрицательные значения. Также функция дифференцируема в точках -1 и 1, а значит, непрерывна в этих точках. Поэтому рассматриваемая функция убывает на промежутке $[-1; 1]$.

§ 39. Точки экстремума функции

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятиями окрестности точки, точек экстремума (максимума и минимума) функции, критических точек функции; применять необходимое условие экстремума функции, применять признак точки максимума функции и признак точки минимума функции. ***Личностные:*** формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные:*** формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями окрестности точки, точек экстремума (максимума и минимума) функции, критических точек функции; применять необходимое условие экстремума функции, применять признак точки максимума функции и признак точки минимума функции.
Основные понятия	Окрестность точки, точка максимума, точка минимума, точка экстремума, необходимое условие экстремума функции, критическая точка, признак точки максимума функции, признак точки минимума функции.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	39.1, 39.3, 39.4, 39.5, 39.6		39.24		39.2, 39.7
2	39.8, 39.10, 39.12, 39.14, 39.16		39.25		39.9, 39.11, 39.13, 39.15, 39.17
3	39.18, 39.20, 39.22			№ 303 (2, 4), 304 (2), 307 (2)	39.19, 39.21, 39.23

Методические комментарии

При изучении понятия окрестности точки следует обратить внимание, что окрестность не обязана быть симметричной относительно точки.

Надо подчеркнуть, что в определении окрестность — это открытый промежуток. Следовательно, точка x_0 не может быть «концом» промежутка-окрестности, с обеих сторон от точки x_0 должны иметься точки, принадлежащие окрестности. Именно на этих особенностях окрестности далее основывается определение точек экстремума и их отличие от точек, в которых функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. Точка экстремума функции не может быть изолированной точкой области её определения.

При изучении определения критической точки следует подчеркнуть, что критическая точка принадлежит области определения функции, причём является её внутренней точкой.

Следует обратить внимание учащихся на то, что в определениях точек минимума и максимума функции используется знак нестрогого неравенства. Здесь надо рассмотреть с учащимися рисунок 39.7 и подчеркнуть, что именно нестрогие неравенства в определениях позволяют трактовать каждую точку промежутка $(x_1; x_2)$ и как точку максимума, и как точку минимума одновременно.

Важно, чтобы учащиеся понимали, что теорема 39.1 является необходимым, но не достаточным условием существования точки экстремума.

Теоремы 39.2 и 39.3 применимы только для того случая, когда исследуемая функция дифференцируема в некоторой окрестности исследуемой точки, в том числе и в самой точке. Последнее условие является избыточным. Можно было бы ограничиться требованием непрерывности функции в исследуемой точке. Поскольку учащиеся не владеют аппаратом исследования функции в данной точке на непрерывность, то предлагаемые достаточные условия существования точек экстремума являются приемлемыми.

Теоремы 39.2 и 39.3 не доказываются, а разъясняются с помощью очевидных наглядных соображений. Вообще, постоянная апелляция к рисункам является характерной чертой изложения материала в данном учебнике.

Следует обратить внимание на корректное использование учащимися терминологии. Точка экстремума, критическая точка, точки максимума и минимума — это всё абсциссы точек графика, а не сами эти точки.

Комментарии к упражнениям

№ 39.3. Рисунок 39.20 (*в*, *г*) учебника иллюстрирует, что в точке экстремума функция не обязательно является непрерывной.

№ 39.5. При решении этой задачи следует руководствоваться исключительно наглядными соображениями.

№ 39.6, 39.7, 39.10, 39.11, 39.14, 39.15. Схема оформления решения этих задач показана в разобранном примере параграфа.

№ 39.20, 39.21. Производной данной функции является квадратичная функция. Для выполнения условия задачи следует потребовать, чтобы эта

2184020o1.indd 78 18.08.2017 11:49:36

квадратичная функция имела только один нуль, т. е. дискриминант соответствующего квадратного трёхчлена должен быть равен нулю.

§ 40. Применение производной при нахождении наибольшего и наименьшего значений функции

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение находить наибольшее и наименьшее значения непрерывных функций на закрытом промежутке. ***Личностные:*** формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием. ***Метапредметные:*** формировать умения осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований.
Планируемые результаты	Учащийся научится находить наибольшее и наименьшее значения непрерывных функций на закрытом промежутке.
Основные понятия	Точка локального максимума, точка локального минимума.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	40.1, 40.3, 40.5		40.20		40.2, 40.4, 40.6
2	40.7, 40.9, 40.11, 40.13		40.21		40.8, 40.10, 40.12, 40.14
3	40.15, 40.17, 40.19			№ 309 (3, 4), 311	40.16, 40.18

Методические комментарии

Понятия наибольшего и наименьшего значений функции следует обсудить с учащимися, указав на то, что эти значения определяются и для всей области определения, и для отдельных промежутков. Следует привести примеры, когда наибольшего функция не достигает (наименьшего) значения на всей области определения (например, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$). После этого учащиеся будут считать естественным переход к поиску наибольшего (наименьшего) значения функции на некотором промежутке.

В учебнике рассматривается задача поиска наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции на закрытом промежутке. Такое ограничение сделано для того, чтобы как можно больше упростить для учащихся алгоритм поиска этих значений, оставив, впрочем, его основные необходимые элементы: необходимость анализировать значения функции на концах промежутка и в критических точках, а также возможность без дополнительного анализа использовать признаки минимума и максимума функции. За счёт того что выбран закрытый промежуток, исключается необходимость отдельно анализировать поведение функции в критической точке, исследуя её на экстремум.

С учётом этих ограничений, алгоритм поиска наибольшего (наименьшего) значения функции достаточно прозрачен и доступен. Поэтому в задачах данного параграфа особое внимание следует уделить корректному составлению математической модели описанной ситуации и правильному определению набора критических точек.

Комментарии к упражнениям

№ 40.11—40.19. В этих задачах следует обратить внимание на их условия, согласно которым надо определять исследуемый промежуток и включать или не включать в рассмотрение конечные точки этого промежутка.

§ 41. Построение графиков функций

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение строить графики функций с помощью методов математического анализа для исследования функций. ***Личностные:*** развивать познавательный интерес к математике. ***Метапредметные:*** формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится строить графики функций с помощью методов математического анализа для исследования функций.
Основные понятия	План исследования свойств функции.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	41.1 (1—3)				41.2 (1, 2)
2	41.1 (4—7)				41.2 (3—5)
3	41.3 (1—4)				41.4 (1—3)
4	41.3 (5—8)			№ 316 (2, 4)	41.4 (4—6)

Методические комментарии

Материал этого параграфа подводит итог приёмам и методам исследования функций, изученным в данной главе. Приведённый план исследования функции и построения её графика основан на том, что учащимся классов с базовым уровнем изучения математики в заданиях на построение графиков будут предложены функции, не требующие более сложного аппарата их исследования (исследования на выпуклость, наличие асимптот и т. п.). Учащиеся должны хорошо усвоить этот план и уметь строить по нему графики функций. Все задания к параграфу подобраны так, что учащийся научится реализовывать план построения, не пропуская отдельных пунктов.

Понятия горизонтальной и вертикальной асимптот графика вводятся наглядно, на примере построения конкретной функции. Желательно, чтобы учащиеся самостоятельно пришли к выводу, что поиск асимптот может быть включён в пункт 7 плана («Выявить другие особенности функции»).

Комментарии к упражнениям

№ 41.3, 41.4. Следует воспользоваться схемой исследования на горизонтальные и вертикальные асимптоты, показанной в примере 2 параграфа.

Контрольная работа № 8

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Тема. Повторение и расширение сведений о функции

Вариант 1

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:
1) $y = -3x + 1$ на промежутке $[-2; 1]$;
2) $y = x^2 - 4x$ на промежутке $[0; 3]$.

2. Исследуйте на чётность функцию:
1) $y = x^6 - x^2$;
2) $y = x^5 - 3x^4$;
3) $y = \dfrac{4x}{x^2 - 8}$;
4) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$.

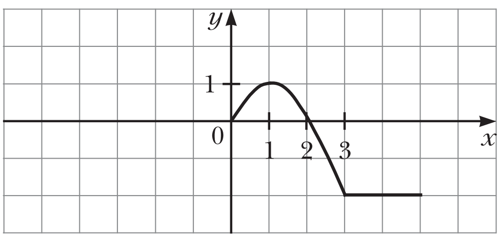
3. Найдите функцию, обратную к функции $y = -3x + 7$.

4. Постройте график функции $y = \sqrt{2x + 3}$.

5. Являются ли равносильными уравнения:
1) $x^2 = 4$ и $x^2 + \dfrac{1}{x - 6} = \dfrac{1}{x - 6} + 4$;
2) $x^2 = 4$ и $x^2 + \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{1}{x - 2} + 4$?

6. На рисунке 1 изображена часть графика чётной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-5; 5]$. Достройте график этой функции и найдите её наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[-5; 5]$.

Рис. 1



7. Решите неравенство:
1) $(x - 2)(x + 6)(x - 4) > 0$;
2) $(3 - x)(x - 4)(x - 9)^2 \geqslant 0$;
3) $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{13}{x^2 - 2x} \leqslant 0$.

2184020o1.indd 82 18.08.2017 11:49:36

Вариант 2

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:
1) $y = 2x - 3$ на промежутке $[-3; 2]$;
2) $y = x^2 + 4x$ на промежутке $[-3; 0]$.

2. Исследуйте на чётность функцию:
1) $y = x^5 - x^3$;
2) $y = x^6 + 2x^3$;
3) $y = \dfrac{5x^2}{x^2 - 7}$;
4) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x}$.

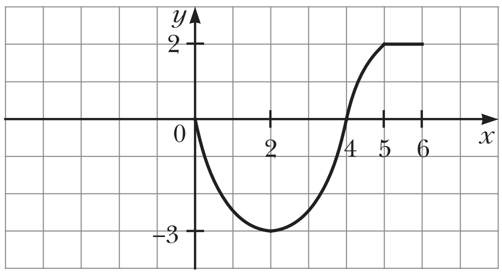
3. Найдите функцию, обратную к функции $y = 2x - 4$.

4. Постройте график функции $y = \sqrt{\dfrac{1}{2}x - 1}$.

5. Являются ли равносильными уравнения:
1) $x^2 = 9$ и $x^2 + \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{1}{x-4} + 9$;
2) $x^2 = 9$ и $x^2 + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{x+3} + 9$?

6. На рисунке 2 изображена часть графика нечётной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-6; 6]$. Достройте график этой функции и найдите её наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[-6; 6]$.

Рис. 2



7. Решите неравенство:
1) $(x + 2)(x - 8)(x + 5) > 0$;
2) $(x + 2)^2(x - 3)(4 - x) \geqslant 0$;
3) $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2 - 3x} \geqslant 0$.

Вариант 3

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 3x - 2$ на промежутке $[-1; 4]$;

2) $y = x^2 + 6x$ на промежутке $[-4; 0]$.

2. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = x^8 + x^4$; 3) $y = \dfrac{8x}{x^2 - 14}$;

2) $y = x^7 - 5x^4$; 4) $y = \dfrac{x^2 + 8x}{x^2 - 6}$.

3. Найдите функцию, обратную к функции $y = -4x + 2$.

4. Постройте график функции $y = \sqrt{2x - 5}$.

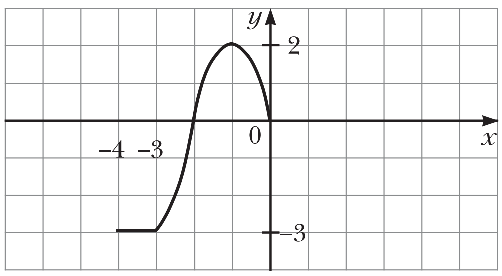
5. Являются ли равносильными уравнения:

1) $x^2 = 16$ и $x^2 + \dfrac{1}{x + 4} = \dfrac{1}{x + 4} + 16$;

2) $x^2 = 16$ и $x^2 + \dfrac{1}{x - 5} = \dfrac{1}{x - 5} + 16$?

6. На рисунке 3 изображена часть графика чётной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-4; 4]$. Достройте график этой функции и найдите её наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[-4; 4]$.

Рис. 3



7. Решите неравенство:

1) $(x + 7)(x - 1)(x + 8) < 0$;

2) $(x - 1)^2(5 - x)(x - 6) \geqslant 0$;

3) $\dfrac{x}{x - 4} - \dfrac{3}{x} - \dfrac{22}{x^2 - 4x} \leqslant 0$.

2184020o1.indd 84 18.08.2017 11:49:36

Вариант 4

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:
1) $y = -2x + 5$ на промежутке $[-2; 3]$;
2) $y = x^2 - 6x$ на промежутке $[0; 5]$.

2. Исследуйте на чётность функцию:
1) $y = x^{10} + x^4$;
2) $y = x^9 + 6x^4$;
3) $y = \dfrac{7x^5}{x^2 - 10}$;
4) $y = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 9x}$.

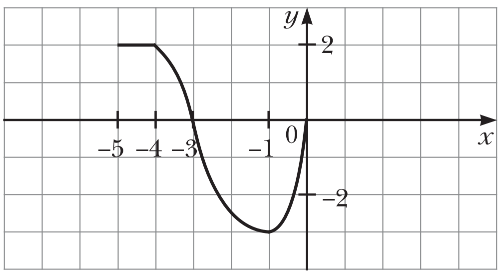
3. Найдите функцию, обратную к функции $y = 3x + 1$.

4. Постройте график функции $y = \sqrt{\frac{1}{2}x + 2}$.

5. Являются ли равносильными уравнения:
1) $x^2 = 25$ и $x^2 + \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{1}{x+5} + 25$;
2) $x^2 = 25$ и $x^2 + \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{1}{x-4} + 25$?

6. На рисунке 4 изображена часть графика нечётной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-5; 5]$. Достройте график этой функции и найдите её наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[-5; 5]$.

Рис. 4



7. Решите неравенство:
1) $(x + 2)(x - 8)(x + 5) > 0$;
2) $(x + 5)^2(x - 6)(8 - x) \geqslant 0$;
3) $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2 - 3x} \geqslant 0$.

2184020o1.indd 85 18.08.2017 11:49:36

Контрольная работа № 2

Тема. Степенная функция. Корень *n*-й степени и его свойства

Вариант 1

1. Функция задана формулой $f(x) = x^{16}$. Сравните:
1) $f(5,6)$ и $f(2,4)$; 3) $f(4,5)$ и $f(-4,5)$;
2) $f(-2,8)$ и $f(-7,3)$; 4) $f(0,3)$ и $f(-0,8)$.

2. Найдите значение выражения:
1) $3\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{625}$; 3) $\sqrt[4]{2^{12} \cdot 5^8}$;
2) $\sqrt[3]{27 \cdot 0,008}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{432}}{\sqrt[3]{2}}$.

3. Решите уравнение:
1) $x^5 = 6$; 3) $x^5 = -243$; 5) $\sqrt[3]{x} = 2$;
2) $x^4 = 16$; 4) $x^4 = -81$; 6) $\sqrt[4]{x} = -1$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-4}$ на промежутке $[2; 4]$.

5. Упростите выражение:
1) $\sqrt[18]{a^3}$; 3) $\sqrt[8]{a^8}$, если $a \geqslant 0$;
2) $\sqrt[3]{m^2 \sqrt[4]{m}}$; 4) $\sqrt[4]{(a-1)^4}$, если $a \leqslant 1$.

6. Определите графически количество решений системы уравнений
$$\begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^5 - 2. \end{cases}$$

7. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:
1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$; 2) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}}$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{8}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1} - \dfrac{\sqrt[4]{x}+3}{\sqrt[4]{x}+1}\right) : \dfrac{3}{\sqrt{x}-1}$.

Вариант 2

1. Функция задана формулой $f(x) = x^{18}$. Сравните:
1) $f(3,6)$ и $f(1,8)$; 3) $f(-5,4)$ и $f(5,4)$;
2) $f(-1,7)$ и $f(-2,5)$; 4) $f(0,9)$ и $f(-0,2)$.

2. Найдите значение выражения:
1) $5\sqrt[4]{16} - 2\sqrt[3]{-216} - \sqrt[6]{64}$; 3) $\sqrt[6]{3^{12} \cdot 2^{18}}$;
2) $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 256}$; 4) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$.

3. Решите уравнение:

1) $x^7 = 10$; 3) $x^3 = -216$; 5) $\sqrt[5]{x} = 1$;

2) $x^6 = 64$; 4) $x^4 = -16$; 6) $\sqrt[6]{x} = -3$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-3}$ на промежутке $[-3; -1]$.

5. Упростите выражение:

1) $\sqrt[28]{a^7}$; 3) $\sqrt[6]{m^6}$, если $m \leqslant 0$;

2) $\sqrt[5]{b^3 \sqrt[4]{b^3}}$; 4) $\sqrt[10]{(x-2)^{10}}$, если $x \geqslant 2$.

6. Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 1. \end{cases}$

7. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$; 2) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+6}{\sqrt[6]{x}+2} - \dfrac{\sqrt[6]{x}+2}{\sqrt[6]{x}-2} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}-4}\right) : \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Вариант 3

1. Функция задана формулой $f(x) = x^{20}$. Сравните:

1) $f(2{,}4)$ и $f(3{,}6)$; 3) $f(-4{,}7)$ и $f(4{,}7)$;

2) $f(-2{,}5)$ и $f(-3{,}1)$; 4) $f(0{,}8)$ и $f(-0{,}6)$.

2. Найдите значение выражения:

1) $4\sqrt[5]{32} + \sqrt[4]{256} - 3\sqrt[3]{-125}$; 3) $\sqrt[8]{5^{24} \cdot 2^{16}}$;

2) $\sqrt[4]{625 \cdot 0{,}0016}$; 4) $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{729}}$.

3. Решите уравнение:

1) $x^9 = 11$; 3) $x^3 = -125$; 5) $\sqrt[3]{x} = 5$;

2) $x^4 = 81$; 4) $x^6 = -64$; 6) $\sqrt[4]{x} = -2$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-5}$ на промежутке $[2; 3]$.

5. Упростите выражение:

1) $\sqrt[35]{x^5}$; 3) $\sqrt[10]{c^{10}}$, если $c \geqslant 0$;

2) $\sqrt[7]{a^4 \sqrt[3]{a^2}}$; 4) $\sqrt[12]{(y-7)^{12}}$, если $y \leqslant 7$.

6. Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^2 + 4. \end{cases}$

2184020o1.indd 87 18.08.2017 11:49:36

7. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$; 2) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[8]{x}+12}{\sqrt[8]{x}+4}-\dfrac{\sqrt[8]{x}+4}{\sqrt[8]{x}-4}+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}-16}\right):\dfrac{15}{\sqrt[4]{x}-16}$.

Вариант 4

1. Функция задана формулой $f(x)=x^{22}$. Сравните:

1) $f(7{,}7)$ и $f(2{,}9)$; 3) $f(-6{,}2)$ и $f(6{,}2)$;
2) $f(-1{,}9)$ и $f(-2{,}4)$; 4) $f(-0{,}1)$ и $f(0{,}6)$.

2. Найдите значение выражения:

1) $4\sqrt[6]{64}-\sqrt[4]{625}-5\sqrt[3]{-27}$; 3) $\sqrt[10]{5^{20}\cdot 2^{30}}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}216\cdot 8}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$.

3. Решите уравнение:

1) $x^{11}=5$; 3) $x^7=-128$; 5) $\sqrt[9]{x}=-1$;

2) $x^4=625$; 4) $x^4=-256$; 6) $\sqrt[4]{x}=-4$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^{-6}$ на промежутке $[-2;-1]$.

5. Упростите выражение:

1) $\sqrt[36]{b^9}$; 3) $\sqrt[12]{z^{12}}$, если $z\leqslant 0$;

2) $\sqrt[4]{a^5\sqrt[3]{a}}$; 4) $\sqrt[8]{(x+3)^8}$, если $x\geqslant -3$.

6. Определите графически количество решений системы уравнений
$\begin{cases} y=x^{-4}, \\ y=x^4-3. \end{cases}$

7. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{16}}$; 2) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[10]{x}+3}{\sqrt[10]{x}-3}-\dfrac{\sqrt[10]{x}+9}{\sqrt[10]{x}+3}+\dfrac{4}{\sqrt[5]{x}-9}\right):\dfrac{8}{\sqrt[5]{x}-9}$.

2184020o1.indd 88 18.08.2017 11:49:36

Контрольная работа № 3

Тема. Степень с рациональным показателем и её свойства. Иррациональные уравнения и неравенства

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

1) $5 \cdot 64^{\frac{1}{2}}$; 2) $125^{-\frac{1}{3}}$; 3) $81^{1,25}$; 4) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-1,5}$.

2. Упростите выражение:

1) $a^{0,6} \cdot a^{3,4}$; 3) $\left(a^{\frac{5}{12}}\right)^{\frac{3}{25}}$; 5) $(a^{-0,8})^4 \cdot (a^{-1,4})^{-2} : (a^{0,4})^{-6}$;

2) $a^{-\frac{3}{7}}a^{\frac{5}{14}}$; 4) $a^{\frac{7}{15}} : a^{\frac{1}{6}}$; 6) $\left(a^{\frac{5}{18}}b^{\frac{10}{27}}\right)^{\frac{9}{5}}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{2x+8} = x$.

4. Сократите дробь:

1) $\dfrac{m - 3m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{2}{3}} - 3}$; 2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}}}$; 3) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}$.

5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-4} + 2\sqrt[4]{x-4} = 35$; 2) $\sqrt{x+5} - \sqrt{8-x} = 1$.

6. Решите неравенство $\sqrt{8x+9} < x$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

1) $3 \cdot 81^{\frac{1}{4}}$; 2) $32^{-\frac{1}{5}}$; 3) $16^{1,25}$; 4) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{-0,5}$.

2. Упростите выражение:

1) $c^{3,8} \cdot c^{1,2}$; 3) $\left(c^{\frac{15}{28}}\right)^{\frac{14}{45}}$; 5) $(c^{0,6})^6 \cdot (c^{0,4})^{-7} : (c^{-1,6})^{-3}$;

2) $c^{-\frac{3}{8}}c^{\frac{5}{16}}$; 4) $c^{\frac{5}{8}} : c^{\frac{1}{6}}$; 6) $\left(b^{\frac{7}{30}}c^{\frac{3}{10}}\right)^{\frac{10}{21}}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{2x+48} = -x$.

4. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x + 7x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{3}{5}} + 7}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}}$; 3) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}} + 3m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} + 6m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{4}} + 9n^{\frac{1}{2}}}$.

5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-2} + \sqrt[4]{x-2} = 20$; 2) $\sqrt{2x+7} - \sqrt{2-x} = 2$.

6. Решите неравенство $\sqrt{7x+8} < x$.

2184020o1.indd 89 18.08.2017 11:49:37

Вариант 3

1. Найдите значение выражения:

1) $4 \cdot 27^{\frac{1}{3}}$; 2) $64^{-\frac{1}{6}}$; 3) $625^{0,75}$; 4) $\left(3\frac{1}{16}\right)^{-0,5}$.

2. Упростите выражение:

1) $a^{0,9} \cdot a^{4,5}$; 3) $\left(a^{\frac{8}{15}}\right)^{\frac{5}{16}}$; 5) $(a^{-0,6})^3 \cdot (a^{-1,2})^{-4} : (a^{0,5})^{-3}$;

2) $a^{-\frac{4}{9}}a^{\frac{7}{18}}$; 4) $a^{\frac{5}{12}} : a^{\frac{1}{8}}$; 6) $\left(a^{\frac{7}{36}}b^{\frac{21}{30}}\right)^{\frac{6}{7}}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3x+10} = x$.

4. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a - 11a^{\frac{4}{7}}}{a^{\frac{3}{7}} - 11}$; 2) $\dfrac{x^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{10}} + y^{\frac{1}{10}}}$; 3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}} - 2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}}$.

5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} = 6$; 2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{12-x} = 1$.

6. Решите неравенство $\sqrt{10x+11} < x$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения:

1) $6 \cdot 125^{\frac{1}{3}}$; 2) $81^{-\frac{1}{4}}$; 3) $32^{0,8}$; 4) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-1,5}$.

2. Упростите выражение:

1) $k^{1,7} \cdot k^{4,8}$; 3) $\left(b^{\frac{12}{55}}\right)^{\frac{11}{48}}$; 5) $(c^{-0,8})^4 \cdot (c^{1,3})^{-5} : (c^{-2,4})^{-2}$;

2) $a^{-\frac{5}{6}}a^{\frac{19}{24}}$; 4) $c^{\frac{5}{9}} : c^{\frac{1}{12}}$; 6) $\left(m^{\frac{5}{24}}n^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{8}{15}}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{4x+45} = -x$.

4. Сократите дробь:

1) $\dfrac{b + 10b^{\frac{4}{9}}}{b^{\frac{5}{9}} + 11}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{12}} - b^{\frac{1}{12}}}$; 3) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{12}} + 4x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}} + 8x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{12}} + 16y^{\frac{1}{6}}}$.

5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-8} + 3\sqrt[4]{x-8} = 18$; 2) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = 2$.

6. Решите неравенство $\sqrt{6x+7} < x$.

Контрольная работа № 4

Тема. Тригонометрические функции и их свойства

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\pi-2\sin\frac{\pi}{4}$.

2. Определите знак значения выражения:

1) $\sin 124^\circ \cos 203^\circ \operatorname{tg}(-280^\circ)$; 2) $\sin\frac{7\pi}{10}\cos\frac{13\pi}{12}$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x)=x^2+4\cos x$; 2) $f(x)=\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1-\sin x}$.

4. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 2) $\cos(-690^\circ)$.

5. Сравните значения выражений:

1) $\sin\frac{10\pi}{9}$ и $\sin\frac{12\pi}{11}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{18}\right)$ и $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$.

6. Постройте график функции $f(x)=\cos 3x$, укажите её промежутки возрастания и убывания.

7. Постройте график функции $y=\sqrt{\sin x-1}+2$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{2}-4\cos\frac{\pi}{4}$.

2. Определите знак значения выражения:

1) $\cos 156^\circ \sin(-350^\circ)\operatorname{ctg} 230^\circ$; 2) $\cos\frac{13\pi}{15}\operatorname{ctg}\frac{23\pi}{18}$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x)=x^3-5\sin x$; 2) $f(x)=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\cos x}$.

4. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{ctg}\frac{25\pi}{6}$; 2) $\sin(-1035^\circ)$.

5. Сравните значения выражений:

1) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 2) $\cos\left(-\frac{11\pi}{20}\right)$ и $\cos\left(-\frac{6\pi}{11}\right)$.

6. Постройте график функции $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, укажите её промежутки возрастания и убывания.

7. Постройте график функции $y=\sqrt{\cos x-1}-2$.

2184020o1.indd 91 18.08.2017 11:49:37

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $4\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

2. Определите знак значения выражения:

1) $\sin 221°\cos 176°\operatorname{tg}(-260°)$; 2) $\sin\frac{8\pi}{11}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{9}$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = x^3 - 4\operatorname{ctg} x$; 2) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$.

4. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{3}$; 2) $\cos(-675°)$.

5. Сравните значения выражений:

1) $\cos\frac{17\pi}{16}$ и $\cos\frac{19\pi}{18}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{17}\right)$ и $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{15}\right)$.

6. Постройте график функции $f(x) = \cos\frac{1}{3}x$, укажите её промежутки возрастания и убывания.

7. Постройте график функции $y = \sqrt{\sin x - 1} - 3$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $3\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + 4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$

2. Определите знак значения выражения:

1) $\sin 189°\cos(-170°)\operatorname{ctg} 250°$; 2) $\cos\frac{12\pi}{19}\operatorname{tg}\frac{20\pi}{13}$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = x^4 - 5\operatorname{tg} x$; 2) $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$.

4. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{4}$; 2) $\sin(-1020°)$.

5. Сравните значения выражений:

1) $\operatorname{ctg}\frac{15\pi}{16}$ и $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12}$; 2) $\cos\left(-\frac{10\pi}{19}\right)$ и $\cos\left(-\frac{7\pi}{13}\right)$.

6. Постройте график функции $f(x) = \sin 3x$, укажите её промежутки возрастания и убывания.

7. Постройте график функции $y = \sqrt{\cos x - 1} + 1$.

Контрольная работа № 5

Тема. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы сложения и их следствия

Вариант 1

1. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg} 8\alpha \operatorname{ctg} 8\alpha - \dfrac{\cos^2 6\alpha - 1}{1 - \sin^2 6\alpha}$;

2) $\sin\beta \cos 4\beta + \cos\beta \sin 4\beta$;

3) $\dfrac{\sin 6\alpha}{2\sin 3\alpha}$;

4) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 8\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 8\alpha}$;

5) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos(\pi - 6\alpha)$;

6) $2\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 8\alpha$.

2. Дано: $\cos\alpha = -\dfrac{7}{25}$, $\cos\beta = -\dfrac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$.

3. Докажите тождество:

1) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg} 4\alpha} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha} = \operatorname{tg} 8\alpha$;

2) $\operatorname{ctg} 4\beta \cos 2\beta + \sin 2\beta = \dfrac{1}{2\sin 2\beta}$;

3) $\dfrac{\left(\sin(\pi - 3\alpha) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 3\alpha\right) - \cos(2\pi + \alpha)\right)}{1 + \cos(\pi - 2\alpha)} = -\sin 4\alpha$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg} 9\alpha \operatorname{ctg} 9\alpha - \dfrac{\sin^2 6\alpha - 1}{1 - \cos^2 6\alpha}$;

2) $\cos 6\varphi \cos 4\varphi - \sin 6\varphi \sin 4\varphi$;

3) $\dfrac{2\cos 4\alpha}{\sin 8\alpha}$;

4) $\dfrac{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}$;

5) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

6) $2\cos 4\alpha \cos\alpha - \cos 3\alpha$.

2. Дано: $\sin\alpha = -\dfrac{8}{17}$, $\sin\beta = -0{,}8$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\cos(\alpha + \beta)$.

3. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 5\alpha}{1 + \operatorname{tg} 5\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg} 5\alpha} = \operatorname{tg} 10\alpha$;

2184020o1.indd 93 18.08.2017 11:49:37

2) $\cos 3\beta - \operatorname{ctg} 6\beta \sin 3\beta = \frac{1}{2\cos 3\beta}$;

3) $\dfrac{\left(\cos(2\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 5\alpha\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + 5\alpha)\right)}{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6\alpha\right)} = \sin 4\alpha.$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $7\cos^2\alpha - 5\sin^2\alpha$.

Вариант 3

1. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha - \frac{1 - \cos^2 9\alpha}{\sin^2 9\alpha - 1}$;

2) $\sin 6\beta \cos 2\beta - \cos 6\beta \sin 2\beta$;

3) $\frac{\sin 14\alpha}{2\cos 7\alpha}$;

4) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha}$;

5) $\sin(2\pi - 7\alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 7\alpha\right)$;

6) $2\sin 4\alpha \sin 5\alpha + \cos 9\alpha$.

2. Дано: $\cos\alpha = -0,6$, $\cos\beta = \frac{15}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Найдите $\cos(\alpha - \beta)$.

3. Докажите тождество:

1) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} 3\alpha} - \frac{1}{1 - \operatorname{tg} 3\alpha} = -\operatorname{tg} 6\alpha$;

2) $\sin 5\beta \operatorname{ctg} 10\beta - \cos 5\beta = -\frac{1}{2\cos 5\beta}$;

3) $\dfrac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 6\alpha\right) - \cos(\pi + 4\alpha)\right)\left(\sin(\pi - 6\alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4\alpha\right)\right)}{1 + \cos(2\pi + 10\alpha)} = \sin 2\alpha.$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $3\cos^2\alpha - 8\sin^2\alpha$.

Вариант 4

1. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha - \frac{1 - \sin^2 5\alpha}{\cos^2 5\alpha - 1}$;

2) $\cos 7\varphi \cos 2\varphi + \sin 7\varphi \sin 2\varphi$;

3) $\frac{2\sin 5\alpha}{\sin 10\alpha}$;

4) $\frac{\sin 9\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 9\alpha - \cos 3\alpha}$;

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 5\alpha\right) - \operatorname{ctg}(2\pi - 5\alpha)$;

6) $2\cos 10\alpha \cos 6\alpha - \cos 4\alpha$.

2. Дано: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = -\frac{24}{25}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin(\alpha - \beta)$.

3. Докажите тождество:

1) $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - 1} - \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha + 1} = -\operatorname{tg} 4\alpha$;

2) $\sin 4\beta + \operatorname{ctg} 8\beta \cos 4\beta = \frac{1}{2\sin 4\beta}$;

3) $\frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 7\alpha\right) - \cos(\pi - 3\alpha)\right)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 7\alpha\right) + \sin(2\pi + 3\alpha)\right)}{1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)} = \sin 10\alpha$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $6\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha$.

Контрольная работа № 6

Тема. Тригонометрические уравнения и неравенства

Вариант 1

1. Решите уравнение:

1) $\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$; 3) $\cos 3x + \cos 5x = 0$.

2. Решите неравенство:

1) $\cos 5x < \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Решите уравнение:

1) $3\cos^2 x + 7\sin x - 5 = 0$;
2) $2\sin^2 x + 1{,}5\sin 2x - 3\cos^2 x = 1$;
3) $\sin 8x + \sin 10x + \cos x = 0$.

4. Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\cos 6x$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

1) $\cos 6x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = -1$; 3) $\sin 5x + \sin 7x = 0$.

2. Решите неравенство:

1) $\sin\frac{x}{6} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(6x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant -\sqrt{3}$.

3. Решите уравнение:

1) $4\sin^2 x - 11\cos x - 1 = 0$;
2) $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 2$;
3) $\cos 5x - \cos 7x + \sin x = 0$.

4. Решите уравнение $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\sin x$.

Вариант 3

1. Решите уравнение:

1) $\sin 3x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$; 3) $\cos 9x - \cos 7x = 0$.

2. Решите неравенство:

1) $\cos\frac{x}{5} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Решите уравнение:

1) $6\cos^2 x + 13\sin x - 8 = 0$;

2) $4\cos^2 x + 2{,}5\sin 2x - 3\sin^2 x = 3;$
3) $\sin 5x + \sin 3x - \cos x = 0.$

4. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\cos 7x.$

Вариант 4

1. Решите уравнение:

1) $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2};$ 2) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1;$ 3) $\sin 7x - \sin 5x = 0.$

2. Решите неравенство:

1) $\sin 6x < -\frac{\sqrt{3}}{2};$ 2) $\operatorname{ctg}\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \sqrt{3}.$

3. Решите уравнение:

1) $5\sin^2 x - 14\cos x - 2 = 0;$
2) $5\sin^2 x - 2\sin 2x + 7\cos^2 x = 4;$
3) $\cos 7x - \cos 9x + \sin x = 0.$

4. Решите уравнение $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos x.$

Контрольная работа № 7

Тема. Производная. Уравнение касательной

Вариант 1

1. Найдите производную функции:

1) $f(x) = 7x^6 - \frac{x^4}{4} + 5x^2 - 6;$ 3) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x};$

2) $f(x) = (3x + 1)\sqrt{x};$ 4) $f(x) = \frac{2}{x^5} - \frac{3}{x^2}.$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 3.$

3. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$ (перемещение s измеряется в метрах, время t — в секундах). Найдите скорость её движения в момент времени $t_0 = 3$ с.

4. Найдите производную данной функции и вычислите её значение в точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt{2x - 1},\ x_0 = 13;$ 2) $f(x) = \sin^5 x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}.$

5. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = x^2 - x\sqrt{3},$ в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 30°.

6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 3x - 8,$ если эта касательная параллельна прямой $y = 5x + 1.$

Вариант 2

1. Найдите производную функции:

1) $f(x) = 8x^5 - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 4;$ 3) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x};$

2) $f(x) = (3 - 4x)\sqrt{x};$ 4) $f(x) = \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3}.$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = 4.$

3. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 3t^2 - 2t + 4$ (перемещение s измеряется в метрах, время t — в секундах). Найдите скорость её движения в момент времени $t_0 = 2$ с.

4. Найдите производную данной функции и вычислите её значение в точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt{3x + 4},\ x_0 = 4;$ 2) $f(x) = \cos^5 x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}.$

5. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = x^2 + 4x\sqrt{3}$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 60°.
6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x + 6$, если эта касательная параллельна прямой $y = 2x - 8$.

Вариант 3

1. Найдите производную функции:

   1) $f(x) = 6x^4 - \frac{x^2}{2} - 7x + 10$;

   2) $f(x) = (5x - 1)\sqrt{x}$;

   3) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x}$;

   4) $f(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x^2}$.
2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 4x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.
3. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^2 + 3t - 1$ (перемещение s измеряется в метрах, время t — в секундах). Найдите скорость её движения в момент времени $t_0 = 5$ с.
4. Найдите производную данной функции и вычислите её значение в точке x_0:

   1) $f(x) = \sqrt{4x + 1}$, $x_0 = 12$;

   2) $f(x) = \mathrm{tg}^2\, x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
5. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = 3x^2 + 7x$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°.
6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 3x + 5$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x + 2$.

Вариант 4

1. Найдите производную функции:

   1) $f(x) = 4x^8 - \frac{x^5}{5} + 2x^2 - 3$;

   2) $f(x) = (5 - 3x)\sqrt{x}$;

   3) $f(x) = \frac{x^2 - 7}{x}$;

   4) $f(x) = \frac{8}{x^2} - \frac{3}{x^7}$.
2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.
3. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 4t^2 - 2t + 1$ (перемещение s измеряется в метрах, время t — в секундах). Найдите скорость её движения в момент времени $t_0 = 4$ с.

4. Найдите производную данной функции и вычислите её значение в точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt{6x - 2}$, $x_0 = 3$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg}^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

5. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = 5x^2 - 5x$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 135°.

6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 5x + 3$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x - 1$.

Контрольная работа № 8

Тема. Применение производной

Вариант 1

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 12x + 7$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 1 - 3x^2 - x^3$ на промежутке $[-1; 2]$.

3. Представьте число 60 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

4. Исследуйте функцию $f(x) = 3x - x^3$ и постройте её график.

5. При каких значениях a функция $f(x) = 2x^3 - 3(a+4)x^2 + 54x - 16$ возрастает на $\boldsymbol{R}$?

Вариант 2

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = 4 + 9x + 3x^2 - x^3$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x - 4}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ на промежутке $[0; 3]$.

3. Представьте число 36 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

4. Исследуйте функцию $f(x) = x^4 - 4x^2$ и постройте её график.

5. При каких значениях a функция $f(x) = -2x^3 + 3(a+1)x^2 - 96x - 100$ убывает на $\boldsymbol{R}$?

Вариант 3

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 3$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x}{x - 2}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 10x + 4$ на промежутке $[-3; 3]$.

3. Представьте число 20 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

4. Исследуйте функцию $f(x) = 3 + 2x^2 - x^4$ и постройте её график.

5. При каких значениях a функция $f(x) = 2x^3 - 3(a-3)x^2 + 24x - 45$ возрастает на $\boldsymbol{R}$?

Вариант 4

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = 1 + 72x + 3x^2 - 2x^3$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25x}{x + 2}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ на промежутке $[-1; 3]$.

3. Представьте число 48 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

4. Исследуйте функцию $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$ и постройте её график.

5. При каких значениях a функция $f(x) = -2x^3 + 3(a-2)x^2 - 6x - 74$ убывает на $\boldsymbol{R}$?

Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся

Одним из направлений оценочной деятельности в соответствии с требованиями Федерального образовательного стандарта среднего (полного) общего образования является оценка образовательных достижений учащихся.

Система оценки достижения планируемых результатов по алгебре направлена на обеспечение качества математического образования. Она должна позволять отслеживать индивидуальную динамику развития учащихся, обеспечивать обратную связь для учителей, учащихся и родителей.

Формирование **личностных результатов** обеспечивается в ходе реализации всех компонентов образовательного процесса, включая внеурочную деятельность, реализуемую семьёй и школой.

Основным **объектом** оценки личностных результатов служит сформированность универсальных учебных действий, включаемых в следующие три основных блока:

1) сформированность *основ гражданской идентичности* личности;

2) готовность к переходу к *самообразованию на основе учебно-познавательной мотивации,* в том числе готовность к *выбору направления профильного образования;*

3) сформированность *социальных компетенций,* включая ценностно-смысловые установки и моральные нормы, опыт социальных и межличностных отношений, правосознание.

Основным объектом оценки **метапредметных результатов** является:

• способность и готовность к освоению систематических знаний по математике, их самостоятельному пополнению, переносу и интеграции;

• способность к сотрудничеству и коммуникации в ходе учебной и внеучебной деятельности;

• способность и готовность к использованию информационных технологий в целях обучения и развития;

• способность к самоорганизации, саморегуляции и рефлексии.

Основным **объектом** оценки **предметных результатов** по математике в соответствии с требованиями Стандарта является способность к решению учебно-познавательных и учебно-практических задач, основанных на изучаемом учебном материале, с использованием способов действий, релевантных содержанию учебных предметов, в том числе метапредметных (познавательных, регулятивных, коммуникативных) действий.

Основными видами оценивания образовательных достижений по математике являются: *стартовое, текущее* и *итоговое*.

Стартовое оценивание позволяет учителю спланировать личностно-ориентированное обучение, индивидуализировать образовательный процесс.

Текущее оценивание позволяет определить уровень усвоения нового материала, степень самостоятельности обучающихся при решении задач, характер применения рациональных способов решения задач и др. Для текущего оценивания можно использовать следующие методы контроля.

Методы контроля в учебном процессе по алгебре

Устный контроль	Письменный контроль	Практический контроль
• Фронтальный опрос • Индивидуальный опрос	• Математический диктант • Самостоятельная работа • Контрольная работа • Реферат • Тест • Зачёт	• Фронтальная или индивидуальная практическая работа • Домашняя контрольная работа • Исследовательская работа • Проектная работа

Итоговое оценивание может проводиться после завершения темы, раздела, учебного курса основной или старшей школы (в частности, в виде итоговой аттестации). Итоговая оценка результатов освоения обучающимися основной образовательной программы выставляется по результатам промежуточной и итоговой аттестации и формируется на основе:

• результатов внутришкольного мониторинга образовательных достижений по математике, зафиксированных в оценочных листах, в том числе за промежуточные и итоговые работы на межпредметной основе;

• оценок за выполнение итоговых работ по математике;

• оценки за выполнение и защиту индивидуального проекта;

• оценок за работы, выносимые на государственную итоговую аттестацию (ГИА) и единый государственный экзамен (ЕГЭ).

Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся

ИКТ-компетентность учащихся – умение самостоятельно работать с информацией, способность решать учебно-познавательные задачи, используя средства ИКТ.

ИКТ-компетентность учителя – умение, способность и готовность решать профессиональные задачи, используя распространённые в данной профессиональной области средства ИКТ.

С целью формирования ИКТ-компетентности учащихся при обучении математике использовать средства ИКТ можно:

• на уроках математики;

• во внеурочной деятельности;

• в учебно-исследовательской и проектной деятельности;

• при измерении, контроле и оценке планируемых результатов.

Для того чтобы значительно расширить дидактические возможности урока математики, учитель может *использовать следующие* средства ИКТ: *мультимедийные фрагменты теоретических материалов, электронные дидактические материалы, моделирование геометрических фигур*, *готовые программные продукты (компьютерные тренажёры, интерактивные курсы, коллекции ЭОР и др.)*. В помощь учителю предлагаем технологическую карту урока (приложение 1), на котором используются ИКТ.

Для успешного осуществления внеурочной, учебно-исследовательской и проектной деятельности учащиеся осуществляют поиск необходимой информации в сети Интернет, работу с электронными учебниками и приложениями к ним, создают и редактируют компьютерные презентации, веб-страницы.

Использование средств ИКТ при обучении математике способствует:

• *повышению интереса к предмету, мотивации обучения, познавательного интереса;*

• *расширению возможностей использования источников информации;*

• *созданию возможностей для дифференцированного, индивидуального и личностно-ориентированного обучения;*

• *повышению эффективности анализов результатов обучения.*

Применение средств ИКТ в обучении математике формирует ИКТ-компетентность учащихся, в результате чего учащийся научится:

• использовать калькулятор для вычислений;

• осуществлять редактирование и структурирование текста, используя средства текстового редактора;

• создавать и редактировать таблицы, используя средства текстового редактора и редактора таблиц;

• создавать различные геометрические объекты с использованием возможностей специальных инструментов компьютерных программ;

• создавать графические объекты;

• осуществлять поиск информации в Интернете;

• соблюдать требования техники безопасности при работе с устройствами ИКТ.

Приложение 1

Технологическая карта урока №

Тема урока ______________________________

Тип урока ______________________________

Формируемые результаты

Предметные: ______________________________

Личностные: ______________________________

Метапредметные: ______________________________

Планируемые результаты ______________________________

____

Основные понятия ______________________________

____

Средства ИКТ, используемые на уроке ______________________________

____

Программное обеспечение ______________________________

____

Образовательные интернет-ресурсы ______________________________

____

2184020o1.indd 106 18.08.2017 11:49:37

Организационная структура урока

<table>
<tr><th rowspan="2">Этапы проведения урока</th><th rowspan="2">Форма органи-зации УД</th><th colspan="4">Задания для учащихся, выполнение которых приведёт к достижению планируемых результатов</th><th rowspan="2">Средства ИКТ</th></tr>
<tr><th>Учебник</th><th colspan="2">Рабочая тетрадь</th><th>Дидакти-ческие материалы</th></tr>
<tr><td colspan="7">1. Организационный этап</td></tr>
<tr><td colspan="7">2. Постановка формируемых результатов и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся</td></tr>
<tr><td>3. Актуализация знаний</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Изучение нового материала</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5. Первичное закрепление нового материала</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6. Итоги урока</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7. Информация о домашнем задании</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся

Проект – это вид учебной деятельности, направленный на решение конкретной учебно-познавательной проблемы, с заранее запланированным результатом.

Учебно-исследовательская работа – это решение исследовательской задачи с заранее неизвестным результатом, представляющее собой самостоятельную творческую работу, имитирующую настоящее научное исследование (в частности, обучающиеся учатся выдвигать гипотезы и предлагать способы их проверки, планировать и работать по плану, искать оптимальные и нестандартные решения поставленной задачи и др.).

Учебно-исследовательская и проектная деятельность на уроках математики направлена:

• на повышение интереса учащихся к предмету, мотивацию учебной деятельности, развитие познавательной деятельности;

• развитие коммуникативных умений;

• формирование исследовательских умений: выявлять проблему, ставить цели и задачи исследования, выдвигать гипотезы;

• формирование умений осуществлять планирование, самоконтроль, рефлексию и самоанализ своей деятельности.

При выполнении учебных проектов по математике обучающийся научится:

• анализировать фрагменты работ учёных-математиков;

• описывать историю математических открытий;

• оценивать вклад выдающихся учёных-математиков в развитие науки;

• представлять результаты измерений с помощью таблиц, графиков и выявлять на этой основе эмпирические зависимости;

• рассматривать практические приложения математических знаний;

• применять математические знания в быту и в технике;

• анализировать связь математики с другими естественными науками.

Критерии оценки проектной и учебно-исследовательской деятельности учащихся

1. Обоснование проблемы проекта (исследования) и планирование способов её решения.

2. Постановка целей и задач исследования, глубина раскрытия темы проекта (исследования).

3. Вариативность представленных источников информации, методов исследования, целесообразность их использования.

4. Анализ хода работы, формулировка выводов и оценок, выявление перспектив дальнейшего исследования.

5. Оригинальность высказанных идей, реализация рациональных и нестандартных решений.

6. Оформление проектного продукта (результатов исследования), качество проведения презентации.

7. Практическая направленность полученных результатов.

При оценке проекта (исследования) следует оценивать прежде всего качество работы в целом, а также проявленные при этом умения проектирования учебной деятельности. Отметим, что учитель может устанавливать и другие критерии на основе своего опыта и математической подготовки учащихся.

Технология организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности

План организации проектной деятельности на уроках математики

(Рекомендации для учителя)

Название проекта ______________________________

Цели проекта ______________________________

Планируемые результаты

Предметные: ______________________________

____

Личностные: ______________________________

____

Метапредметные: ______________________________

____

Общая характеристика проекта

Тип проекта: ______________________________

Виды деятельности учащихся: ______________________________

2184020o1.indd 109 18.08.2017 11:49:37

Форма организации: ____________________

Продолжительность выполнения: ____________________

Результат (продукт) деятельности: ____________________

План реализации проекта

Этапы	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
1. Организация деятельности			
Погружение в проект	Определение темы и целей проекта. Формирование групп (группы)	Обсуждают темы проекта в группе (группах) и с учителем	Мотивирует учащихся на проектную деятельность. Рассказывает, что такое проект и метод проектов. Помогает в постановке проблемы. Помогает формировать группу (группы)
Планирование	Определение объёма работ для каждой группы (членов группы). Составление плана работы: определение источников информации; определение способов сбора данных; определение способа представления результата; определение регламента и критериев оценки работы	Распределяют обязанности внутри группы. Каждая группа выбирает тему работы и источники информации. Составляют план работы над проектом. Вырабатывают критерии регламента и оценки работы	Оказывает необходимую организационную и консультативную помощь
2. Осуществление деятельности			
Сбор информации	Сбор информации различными методами: опроса, наблюдения, изучения документации и т. д.	Выполняют работу над проектом	Помогает в изучении информации. Наблюдает, советует. Анализирует групповые взаимоотношения

Этапы	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
Обобщение результатов, выводы	Анализ полученной информации, подготовка к её представлению	Анализируют полученную информацию, выполняют оформление проектной работы	Контролирует, наблюдает, советует
3. Представление результатов и их оценка			
Презентация	Отчёт участников проекта о проделанной работе	Представляют проект	Слушает, при необходимости задаёт вопросы, обобщает, комментирует выступления
Оценка процесса и результатов работы	Оценка конечного результата коллективной деятельности. Анализ достижения поставленной цели. Рефлексия	Оценивают работу каждого члена группы (каждой группы). Анализируют, была ли достигнута поставленная цель. Проводят рефлексию своей деятельности (см. бланк рефлексии)	Участвует в коллективном анализе и оценке результатов проекта. Проводит рефлексию. Оценивает свою деятельность по педагогическому руководству деятельностью детей

Карта оценки проектной деятельности

Название проекта ______________________________

Группа: ______________________________

Параметры	Самооценка[1]	Взаимооценка[1]	Оценка учителя[1]	Средний балл
Выполнение работы по проекту				
Математическая точность				

[1] Оценивается по пятибалльной системе.

Окончание

Параметры	Самооценка[1]	Взаимооценка[1]	Оценка учителя[1]	Средний балл
Оформление результатов проекта				
Качество представления результатов (анализ выступления)				
Итоговый балл				

[1] Оценивается по пятибалльной системе.

Бланк рефлексии

Вопрос	Ответ
1. Понравилось ли вам участвовать в проектной деятельности?	
2. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым интересным?	
3. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым сложным? Почему?	
4. Какие знания вы получили в ходе работы над проектом?	
5. Довольны ли вы своим участием в работе группы (если нет, то почему)?	
6. Как вы оцените взаимоотношения в вашей группе во время работы над проектом?	

Содержание