25. Геометрическая задача на доказательство
Часть 1. ФИПИ

1. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1B_1C и ABC подобны.
2. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.
3. В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что углы AA_1C_1 и ACC_1 равны.
6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.
7. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M – середина AD.
8. Биссектрисы углов C и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке L, лежащей на стороне AB. Докажите, что L – середина AB.
9. Биссектрисы углов B и C параллелограмма ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M – середина AD.
10. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.
11. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади параллелограмма.
12. Сторона AD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны CD. Точка M – середина стороны AD. Докажите, что CM – биссектриса угла BCD.
13. Сторона AB параллелограмма ABCD вдвое больше стороны BC. Точка L – середина стороны AB. Докажите, что CL – биссектриса угла BCD.
14. Сторона CD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AD. Точка N – середина стороны CD. Докажите, что AN – биссектриса угла BAD.
15. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезки AE и CF равны.
16. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и N соответственно. Докажите, что отрезки CL и AN равны.
17. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

18. Биссектрисы углов A и D трапеции ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB, AD и CD.
19. Биссектрисы углов A и B трапеции ABCD пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD. Докажите, что точка K равноудалена от прямых AB, BC и AD.
20. Биссектрисы углов C и D трапеции ABCD пересекаются в точке P, лежащей на стороне AB. Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC, CD и AD.
21. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.
22. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.
23. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.
24. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K. Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.
25. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади трапеции.
26. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 4,5 и 18, $BD = 9$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
27. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 4 и 64, $BD = 16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
28. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 7 и 28, $BD = 14$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
29. Точка E – середина боковой стороны AB трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.
30. Точка K – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.
31. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.
32. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.
33. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы CDB и CAB равны. Докажите, что углы BCA и BDA также равны.

34. Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что CD и EF перпендикулярны.
35. Окружности с центрами в точках M и N пересекаются в точках S и T, причём точки M и N лежат по одну сторону от прямой ST. Докажите, что прямые MN и ST перпендикулярны.
36. Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках K и L, причём точки P и Q лежат по одну сторону от прямой KL. Докажите, что прямые PQ и KL перпендикулярны.
37. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении m:n. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как m:n.
38. Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении a:b. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как a:b.